

El enfoque del espacio de estados en modelos de crecimiento

Oscar García *
Facultad de Ciencias Forestales
Universidad Austral de Chile
Casilla 853
Valdivia, Chile

Resumen

La Teoría de Sistemas puede proporcionar un marco conceptual útil para el desarrollo de modelos de crecimiento forestal. Se examinan y comparan varios enfoques, basándose en la descripción de espacio de estados en sistemas dinámicos. Este punto de vista es usado también para analizar los principios detrás de los índices de sitio basados en alturas y posibles extensiones, y los problemas de estimación estadística de parámetros. Se distinguen cuatro tipos principales de métodos de estimación para sistemas dinámicos. Una generalización multidimensional del modelo de Richards sirve para ilustrar muchas de estas ideas.

Introducción

Una buena planificación del manejo forestal requiere proyecciones confiables de crecimiento y rendimiento. En muchas situaciones, es suficiente el ajuste de curvas de crecimiento simples que describen el curso de variables de rodal en el tiempo. Con manejo más intensivo,

sin embargo, estas variables son manipuladas a través de intervenciones silvícolas que pueden variar en fechas e intensidad, y se hace necesario predecir el comportamiento de rodales en una variedad de circunstancias diferentes. Cómo modelar el número potencialmente infinito de caminos que pueden seguir estos rodales no es enteramente obvio. Aun sin efectos de tratamientos, el tratar con desviaciones causadas por el ambiente y por errores de medición presenta dificultades conceptuales, como se aprecia en mucha de la literatura actual sobre curvas de índices de sitio.

En muchas disciplinas, las ideas de espacio de estados y funciones de transición de la teoría de sistemas son herramientas ya bien establecidas para modelar y pensar sobre sistemas que evolucionan en el tiempo. Indudablemente, muchos en el campo forestal han aplicado un entendimiento intuitivo de algunos de estos principios para producir modelos satisfactorios, pero hay pocos ejemplos de su uso explícito y sistemático. Leary (1975) explicó algunas de las ideas principales. Otras presentaciones son breves e incompletas (García 1988a, 1988b), o demasiado técnicas o de otro modo inaccesibles para muchos usuarios (García 1974, 1979, 1983, 1984). Un mejor entendimiento de la teoría de sistemas dinámi-

*Traducción de *The state-space approach in growth modelling*, **Canadian Journal of Forest Research** 24: 1894–1903, 1994

cos podría ayudar en el desarrollo de fundamentos sólidos para modelar el crecimiento, y en la evaluación y unificación de los varios enfoques y métodos.

Este trabajo introduce los conceptos básicos del modelado del crecimiento desde un punto de vista de espacio de estados. Aunque se ha usado profusamente la notación matemática, el artículo debería ser comprensible para cualquiera con conocimientos básicos de matemáticas y asuntos forestales. Después de discutir algunos puntos sobre modelos en general, se explican los aspectos relevantes de la teoría de sistemas dinámicos. Luego se examinan los fundamentos del modelado del crecimiento, caracterizando los varios tipos de modelos. Sigue una sección sobre el modelado del importante componente que es el crecimiento en altura, y su uso en la cuantificación de la calidad de sitio. Estructuras estocásticas y métodos de estimación adecuados para modelos de crecimiento se analizan en detalle. Finalmente, una forma de modelo específica es usada para ilustrar la teoría.

Modelos

Los forestales pueden influenciar el desarrollo de un rodal a través de numerosas decisiones y tratamientos silvícolas. La densidad de rodal puede ser controlada eligiendo la densidad de plantación, y con raleos. La densidad afecta la producción total, la incidencia de mortalidad natural, y el tamaño y calidad de los árboles individuales. La calidad de la madera puede mejorarse también a través de podas, posiblemente a costa de un menor crecimiento. Otras decisiones de manejo pueden incluir la aplicación de fertilizantes y pesticidas, distintas técnicas de plantación o regeneración, la obtención y uso de semillas genéticamente mejoradas, y la edad de la cosecha final. Está claro que, debido a los largos ciclos de producción

y a las numerosas alternativas de manejo, las posibilidades de aprender por experiencia o experimentación directa son limitadas. En consecuencia, para un manejo forestal racional se necesitan modelos matemáticos de crecimiento capaces de predecir los efectos de los tratamientos, especialmente en el caso de bosques de producción con manejo intensivo.

En general, un modelo es una representación simplificada de algún aspecto de la realidad (no confundir con la acepción normativa de la palabra, algo digno de ser imitado). Continuamente todos usamos modelos en alguna forma. Hay modelos mentales, que son relaciones imaginadas de causa y efecto entre componentes de algún sistema a través de las cuáles tratamos de explicar y anticipar su comportamiento. Se puede plantear modelos en forma verbal, por ejemplo la descripción en palabras del funcionamiento de alguna máquina. Los modelos físicos o materiales, como los modelos a escala de edificios y aviones, son bien conocidos.

Un modelo matemático es como un modelo verbal, pero expresado en lenguaje matemático. El lenguaje matemático difiere del lenguaje natural en que es más conciso y menos ambiguo. Esto, junto con la disponibilidad de reglas que se pueden usar mecánicamente, nos permite razonar en situaciones más complejas, con menos esfuerzo, y con menos riesgo de confundirse.

Con el progreso en computación se hace más fácil manejar modelos cada vez más complejos, y de hecho, el uso de modelos a escala en ingeniería ha ido disminuyendo, reemplazados por modelos matemáticos que son más baratos y más flexibles. Los computadores han llegado a ser indispensables como herramientas para el desarrollo y uso de muchos modelos. Pero nótese la analogía entre modelado por computador y poesía por máquina de escribir. También, el realismo no es necesariamente una virtud en los modelos, es preferible abstraer sólo

aquéllos aspectos más relevantes en cada caso. En un modelo de avión para pruebas en el túnel de viento su color o el nombre del piloto pueden no ser importantes. El manual de una grabadora de video no dice mucho acerca de sus mecanismos internos, pero se puede usar para predecir los efectos de apretar distintos botones.

Es útil distinguir entre modelos para predicción y modelos para comprensión (Bunnell 1989). Los modelos para comprensión (por ejemplo modelos fisiológicos o de procesos) son útiles principalmente en investigación como ayuda al entendimiento, para sintetizar y relacionar conocimientos anteriormente aislados, y para identificar vacíos donde se necesitan más estudios. Los beneficios surgen del desarrollo del modelo, y no tanto de un uso posterior. Aquí me concentraré en modelos para predicción, destinados a la planificación del manejo. Aplicaciones típicas son las proyecciones con fines de planificación forestal, la comparación y evaluación de regímenes silviculturales (podas y raleos), y la actualización de bases de datos de rodales.

En la mayoría de los casos los modelos se presentarán como determinísticos. En general, al tomar decisiones los resultados de un modelo se toman como representativos de los sucesos más probables, y se ha encontrado que la introducción de elementos aleatorios en las predicciones no es muy útil en la práctica. Un componente estocástico (aleatorio o probabilístico) es sin embargo necesario para desarrollar procedimientos de estimación racionales, y estructuras estocásticas adecuadas se describen en este contexto más adelante.

Sistemas dinámicos

Un modelo de crecimiento predice valores futuros de ciertos outputs o *salidas*, por ejemplo el volumen de madera, dados inputs o *en-*

tradas (variables de control) tales como tratamientos silviculturales. Tanto las entradas como las salidas son funciones del tiempo. Este hecho, y la dependencia de las salidas de toda la historia pasada del rodal, han provocado confusión y dificultades considerables en el modelado del crecimiento. Existe un escape bien conocido en otros campos que tratan con sistemas dinámicos, que puede llamarse el enfoque del espacio de estados.¹

La idea es caracterizar el estado del sistema en cualquier instante del tiempo de tal modo que dado el estado actual el futuro no dependa del pasado. Por ejemplo, podríamos caracterizar un rodal coetáneo puro por su área basal, densidad (árboles por hectárea) y altura dominante, y suponer que dos rodales con los mismos valores para estas variables se comportarían prácticamente de la misma manera, no importando cómo llegaron a ese estado. “A grandes rasgos, un estado de un sistema en un instante dado es la información necesaria para determinar el comportamiento del sistema desde ese instante en adelante” (Zadeh 1969). En el modelado siempre podremos describir un sistema en suficiente detalle como para determinar su comportamiento futuro dentro del nivel de exactitud deseado; la existencia de una descripción de estado es un asunto de definiciones. Desde el punto de vista de librarse del pasado, el estado puede ser “considerado como una suerte de almacenamiento de información, o memoria, o una acumulación de causas anteriores” (Kalman et al. 1969) y “una cierta representación compacta de la actividad

¹Estas ideas fueron desarrolladas más claramente en la teoría de sistemas de fines de los años 60 y comienzos de los 70, pero eran ya usadas por sus predecesores, la teoría del control de los 60 y la cibernética de los 50. En una forma especializada se pueden encontrar con anterioridad en la mecánica racional, con contribuciones de ciertas áreas de la teoría de ecuaciones diferenciales. El sucesor actual más activo de la teoría de sistemas parece ser el campo de la dinámica no-lineal.

anterior del sistema suficientemente completa para que nos permita predecir, en base a las entradas, exactamente cuáles serán las salidas, y también actualizar el estado mismo". (Padulo y Arbib 1974)²

Sea el estado en un instante dado t especificado por una lista de n números (variables de estado), o sea, por un vector de estado n -dimensional $\mathbf{x}(t)$. Las entradas y salidas son también vectores de dimensión finita $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$, respectivamente (es posible un planteamiento más general, pero generalmente no es necesario).³ Entonces el comportamiento del sistema queda descrito por una función de transición

$$[1] \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{U}, t - t_0],$$

y una función de salida

$$[2] \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t)]$$

En palabras, [1] (que sin notación vectorial se escribiría como un sistema de n ecuaciones) da el estado en cualquier instante t en función del estado en algún otro instante t_0 , de las entradas (como función del tiempo, denotada por \mathbf{U}), y del tiempo transcurrido entre t_0 y t . La función de salida [2] da las salidas actuales en función del estado actual.

Una función de transición debe satisfacer ciertas condiciones obvias:

(1) (Consistencia) Si el tiempo transcurrido es nulo no hay cambio, o sea,

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{U}, 0] = \mathbf{x}(t) \\ \text{para todo } t, \mathbf{x}(t), \mathbf{U}$$

(2) (Composición o propiedad de semigrupo) El resultado de proyectar el estado primero

²Otra buena referencia es Wiberg (1971)

³Vectores son simplemente una abreviatura para una lista de números, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Las funciones vectoriales, como [1] y [2], son un ahorro de escritura aun mayor: $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es lo mismo que el sistema de ecuaciones $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, \dots , $y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

desde t_0 hasta t_1 , y luego desde t_1 hasta t_2 , debe ser el mismo que el de la proyección en una etapa desde t_0 hasta t_2 :

$$\mathbf{F}[\mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{U}, t_1 - t_0], \mathbf{U}, t_2 - t_1] = \\ \mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{U}, t_2 - t_0] \\ \text{para todo } t_0 \leq t_1 \leq t_2$$

(3) (Causalidad) Un cambio de estado puede ser afectado por entradas sólo dentro del intervalo de tiempo correspondiente:

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{U}_1, t_1 - t_0] = \\ \mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{U}_2, t_1 - t_0] \\ \text{si } \mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t) \\ \text{para } t_0 \leq t \leq t_1$$

El paso siguiente es explotar el hecho de que las funciones de transición generadas por integración de ecuaciones diferenciales (o sumatoria de ecuaciones en diferencias en el caso de tiempos discretos) satisfacen automáticamente esas condiciones. El modelo puede entonces plantearse como⁴

$$[3] \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$[4] \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

En un modelo en tiempo discreto $d\mathbf{x}/dt$ es reemplazado por $\Delta\mathbf{x}$. Integración de la función de transición local [3] entre t_0 y t da la función de transición global [1].

En el enfoque de espacio de estados, entonces, evitamos el tratar de modelar directamente las complejas relaciones entre entradas y salidas a través del tiempo. En lugar de ello, describimos el estado del sistema en cada instante, y modelamos la tasa de cambio de estado [3]. La descripción del estado debe ser tal

⁴La derivada en el lado izquierdo de [3] denota simplemente la tasa de cambio en \mathbf{x} . No se necesitarán conocimientos previos de ecuaciones diferenciales y, si lo prefiere, el lector puede reemplazar en lo que sigue las tasas instantáneas por incrementos para intervalos de tiempo discretos.

que, con suficiente aproximación, los estados futuros queden determinados por el estado actual y las acciones futuras, [3], y cualesquiera cantidades de interés puedan estimarse dadas las variables de estado, [4].

Aquí la función de salida ha representado la conexión entre las variables de estado y otras variables requeridas en las aplicaciones. En problemas de estimación de parámetros una interpretación un poco distinta es a veces útil. En esos casos el estado interno del sistema puede estar parcial o totalmente oculto, y las salidas son variables observables. Esa interpretación será usada más adelante.

Modelos de crecimiento y nivel de resolución

Un modelo de crecimiento bien fundamentado debería poder plantearse como en [3] y [4] o su equivalente en tiempo discreto. Una excepción son los modelos estáticos, para rodales sin raleos o sometidos a regímenes estandarizados, donde la ausencia de entradas alternativas permite modelar las salidas como funciones fijas del tiempo.

Generalmente no es necesario incluir variables de control \mathbf{u} en [3]. Los tratamientos silvícolas (por ejemplo raleos y podas) normalmente ocurren en instantes determinados, y con una descripción de estado adecuada causan un cambio de estado instantáneo. Podemos entonces modelar el rodal entre tratamientos como un sistema libre, donde la tasa de cambio de estado es una función sólo del estado actual. Los cambios en variables de estado provocados por tratamientos, por ejemplo la reducción en área basal resultante de ralear distintos números de árboles por hectárea, pueden representarse por funciones aparte.⁵

⁵Formalmente, la función de transición se separa en dos, una para transiciones por crecimiento y otra

Los varios tipos de modelos de crecimiento difieren en el nivel de detalle incluido en la descripción de estado. Los modelos a nivel de rodal caracterizan el estado del rodal con unas pocas variables que representan agregados a nivel de rodal, tales como área basal, diámetro medio, volumen por hectárea, árboles por hectárea, espaciamiento medio, altura dominante, etc. En el otro extremo, los modelos de árboles individuales dependientes de distancia incluyen la ubicación (coordenadas) y diámetro, y a veces altura y dimensiones de copa, para todos los árboles en una parcela de muestra. Los modelos de árboles individuales independientes de distancia usan distribuciones diamétricas en varias formas, o listas de tamaños, pero sin requerir coordenadas. Es probable que se necesiten modelos de árboles individuales en las situaciones más complejas: rodales multietáneos y/o con varias especies, o plantaciones en hileras u otros diseños en agroforestería (pero véase Bowling et al. 1989). Con rodales puros, coetáneos y razonablemente homogéneos es posible elegir, y el principio de parsimonia sugeriría no usar más variables de estado que las necesarias. Si se necesitan, en general las distribuciones de tamaños se pueden estimar satisfactoriamente a partir de variables de rodal, o sea, se pueden manejar en la función de salida (García 1984). Los modelos innecesariamente complicados resultan a menudo en mayores costos computacionales y en una pérdida de precisión de las estimaciones (Bruce y Wensel 1988).

Algunos problemas potencialmente serios con los modelos de árboles individuales han sido generalmente ignorados. Los rodales no son simples conjuntos de árboles; los tamaños despliegan una estructura espacial. Semejanzas en micro-sitio hacen que árboles vecinos sean

para transiciones por tratamiento. En su mayor parte ignoraremos la segunda, y nos referiremos sólo a la primera como la función de transición, modelando el crecimiento entre tratamientos sucesivos.

más parecidos que el promedio, mientras que la competencia tiene el efecto opuesto. Las correlaciones espaciales que resultan hacen que las distribuciones varíen en forma impredecible con el tamaño de la parcela (García 1992). En particular, las distribuciones obtenidas de parcelas difieren de las que corresponden a rodales enteros, que son las deseadas en la práctica. Además, hasta ahora los modelos dependientes de distancia se han basado solamente en índices de competencia, ignorando los efectos de micro-sitio. Aparentemente el desarrollo de modelos satisfactorios de árboles individuales podría ser más difícil de lo que se pensaba.

Me referiré principalmente a modelos a nivel de rodal, para rodales puros y coetáneos. ¿Cuál sería un vector de estado adecuado? Consideremos la altura dominante H como una descripción de estado unidimensional. Para un sitio dado, la tasa de cambio en H (el incremento en altura) puede modelarse adecuadamente como una función del H actual: $dH/dt = f(H)$, o $\Delta H = f(H)$. Si estuviéramos interesados en predecir volumen por hectárea, sin embargo, esta salida no podría estimarse satisfactoriamente con H solamente. Necesitaríamos más información de estado.

Agreguemos entonces el área basal del rodal, B , formando un vector de estado bidimensional $\mathbf{x} = (H, B)$. La función de transición (local) [3] puede escribirse como un sistema de dos ecuaciones:⁶

$$[5a] \quad \frac{dH}{dt} = f_1(H)$$

$$[5b] \quad \frac{dB}{dt} = f_2(H, B)$$

y la salida (volumen, V) se puede dar como

$$[6] \quad V = g(H, B),$$

⁶Las tasas de crecimiento instantáneas dx_i/dt pueden reemplazarse por incrementos anuales o periódicos Δx_i .

por ejemplo con una ecuación de volumen por hectárea de la forma $V = a + bBH$. Esta formulación bidimensional es cercana a muchos de los modelos de rodal clásicos (Clutter et al. 1983), y puede ser útil examinarla con más detención para hacer algunas consideraciones e ilustrar conceptos básicos. El objeto de estos modelos es predecir el volumen para diferentes regímenes de raleo y espaciamientos iniciales.

Las ecuaciones del modelo generalmente incluyen un índice de sitio o alguna otra medida de calidad de sitio. Siendo una constante para un rodal específico, no he indicado esta variable explícitamente. El área basal no se incluye en [5a], adoptando el supuesto usual de que H no es afectada por la densidad del rodal. Frecuentemente el mismo argumento es usado para modelar H directamente como una función de la edad, en lugar de hacerlo a través del incremento.

La parte fundamental del modelo es [5b]. Es común tomar el incremento en área basal como una función de B y edad, en efecto usando la edad como una variable de estado en lugar de H (Clutter 1963, Pienaar y Turnbull 1973). Pienaar y Turnbull (1973) plantean explícitamente la idea del espacio de estados bidimensional en su hipótesis del rodal raleado: “Dentro de un amplio rango de regímenes de raleo, la tasa de crecimiento en un rodal raleado es idéntica a aquella en un rodal no raleado con la misma edad y área basal que el rodal raleado”. El uso de la edad en el lado derecho es conceptualmente poco satisfactorio en que, al menos en el sentido de tiempo transcurrido t , no tiene una presencia física (excepto como un número de anillos de crecimiento), y por lo tanto no se le debería dar un significado causal. En realidad, cuando los forestales dicen edad a menudo están pensando tamaño. En particular, de acuerdo al modelo y para un sitio dado, la altura dominante está funcionalmente relacionada con la edad, y podemos reemplazar la edad por H , obteniendo una ecuación

como [5b]. En la práctica esta substitución no cambia las cosas, pero es conceptualmente más clara y facilita el pensamiento en situaciones más complicadas.

Como ejemplo, tomemos el modelo de incremento en área basal de Clutter (1963) para índice de sitio 70, $dB/dt = B(5.55 - \ln B)/t$. No hay modelo de altura en esa publicación, así que usemos $\ln H = 4,78 - 13,3/t$ que para sitio 70 se aproxima al de Clutter y Lenhart (1968) con una diferencia menor de 1 pie (1 pie = 0,305 m) dentro del rango de sus datos (el usar su ecuación sería incómodo porque no puede despejarse algebraicamente para t). De aquí, se puede obtener el siguiente modelo de espacio de estados:

$$[7a] \quad \frac{dH}{dt} = 0,0752H(4,78 - \ln H)^2$$

$$[7b] \quad \frac{dB}{dt} = 0,0752B(5,55 - \ln B)(4,78 - \ln H) .$$

En la Fig. 1 se muestran direcciones y velocidades de movimiento dadas por [7]. Las longitudes de los segmentos de recta representan 1 año de crecimiento. Técnicamente, estas funciones de transición local definen un campo vectorial bidimensional sobre todo el espacio de estados $H - B$ (aunque eso no interesa para los puntos del lado superior izquierdo que no son alcanzables en la realidad). Un rodal en cualquier lugar del plano se mueve en la forma indicada por las líneas. Considérese un rodal de 13 pies de altura, con un área basal de 12 pies²/acre (1 pie²/acre = 0,23 m²/ha) a los 6 años de edad. Si se deja sin ralear, seguiría la trayectoria indicada por la curva superior en la figura. Un raleo a la edad 10 (altura 31,5 pies) provoca un salto instantáneo debido a la remoción de área basal, y el rodal sigue una nueva trayectoria desde allí. Se muestra también otro raleo a los 15 años.

Cualquier conjunto de variables en una co-

rrespondencia uno a uno con las variables de estado podría usarse también como una descripción de estado. Sería esencialmente un nombre distinto para los puntos del espacio de estados. Por ejemplo, usando [6] podríamos reemplazar B por V obteniendo un modelo con un vector de estado (H, V) (al mismo tiempo haciendo innecesaria una función de salida). Esto es lo que está detrás del problema de “compatibilidad” tratado por Clutter (1963). Clutter usó extensamente las relaciones entre las funciones de transición locales y globales (véase también Bailey y Clutter 1974), y en Sullivan y Clutter (1972) las condiciones de consistencia y semigrupo se explican claramente.

Si no estamos sólo interesados en el volumen cúbico total, sino que también en volúmenes de madera aserrada, por ejemplo, necesitaríamos aumentar el vector de estado con el diámetro medio o con la densidad (número de árboles por hectárea, N), para reflejar el efecto del tamaño de los árboles en el factor de conversión. Es así frecuente el agregar una ecuación de mortalidad a [5]. Un modelo suficientemente general en muchos casos, toma la forma:

$$[8a] \quad \frac{dH}{dt} = f_1(H)$$

$$[8b] \quad \frac{dB}{dt} = f_2(H, B, N)$$

$$[8c] \quad \frac{dN}{dt} = f_3(H, B, N)$$

Muchas salidas se pueden estimar satisfactoriamente dados H , B y N , incluyendo volúmenes de variados productos y parámetros de distribuciones diamétricas. La interpretación es análoga a la dada anteriormente para el caso bidimensional: en cualquier instante un rodal se caracteriza por su vector de estado $\mathbf{x} = (H, B, N)$, y las ecuaciones de transición [8] indican en que dirección y con que velocidad se desplazará en el espacio de estados tridimensional; las trayectorias seguidas entre

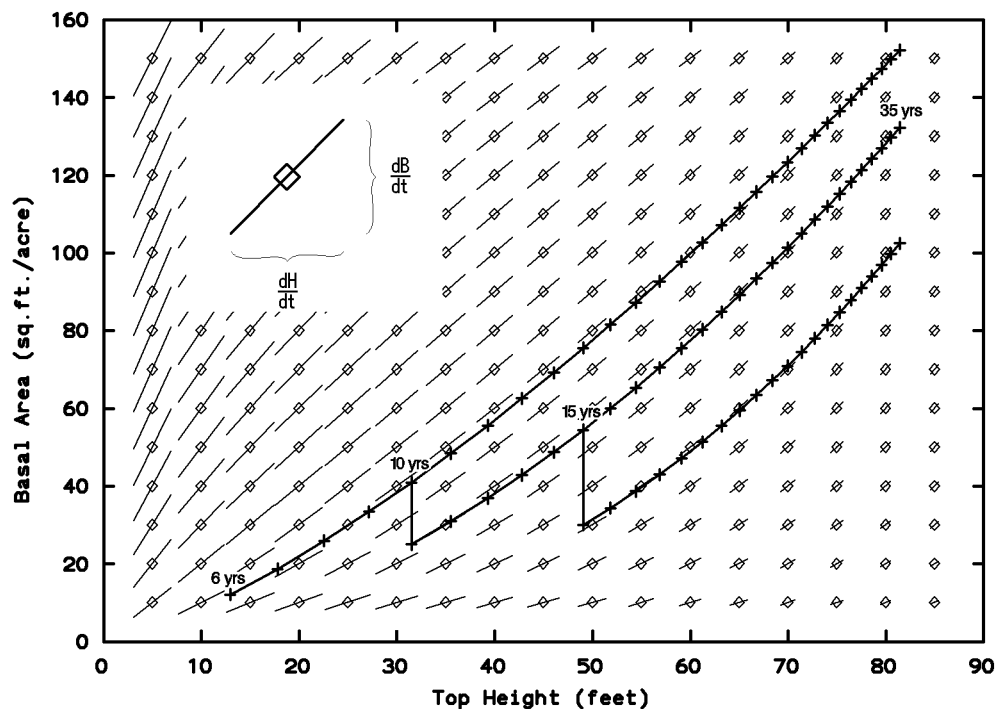


Figura 1: Campo vectorial para el modelo de Clutter

raleos se obtienen por integración.

Se ha observado que en tres dimensiones las trayectorias tienden a concentrarse cerca de una superficie (Decourt 1974, García 1988a), de modo que las ganancias por la inclusión de una variable adicional en [8b] en comparación a [5b] no son muy altas, aunque cuando se cubre un rango amplio de regímenes silviculturales éstas se justifican.

Es posible agregar más variables de estado, aunque pronto se llega a una situación de retornos decrecientes. Después de raleos o podas puede transcurrir algún tiempo antes de que los árboles ocupen completamente el espacio adicional que se les ha proporcionado. Se podría entonces esperar que inmediatamente después de la intervención un rodal crecería menos que otro con los mismos H , B y N pe-

ro no tratado recientemente. Para tener esto en cuenta, en algunos casos, especialmente con raleos y podas muy intensos, el uso de una cuarta variable de estado que representa ocupación del sitio o cierre del dosel ha sido ventajoso (García 1984, 1979, 1990). También se ha obtenido, para rodales con deficiencias nutritivas, un modelo que incluye la concentración foliar de fósforo como otra variable de estado (García 1989, 1988a).

Crecimiento en altura e índice de sitio

La altura dominante de un rodal se define de alguna manera que represente la altura de los árboles más grandes, y en la práctica se pue-

de suponer que (dentro de ciertos límites) es poco afectada por la manipulación de la densidad del rodal a través de raleos y espaciamiento inicial, o por las podas. Ignoraremos los detalles de definiciones más precisas (Fries 1974, Matérn 1976, Rennolls 1978) y problemas concernientes a tratamiento extremos. Al ser independiente de la silvicultura y fácilmente medible, la altura dominante de rodales coetáneos puros es usada comúnmente para evaluar la productividad potencial (calidad de sitio) de los terrenos forestales (Clutter et al. 1983). Otra consecuencia es que el componente de crecimiento en altura [8a] de un modelo constituye un subsistema independiente que puede desarrollarse en forma separada.

Partiendo de un punto inicial dado (por ejemplo $H = 0$ a $t = 0$), [8a] genera una curva única para cada sitio. Para cuantificar la calidad de sitio, se define el índice de sitio como la altura dominante del rodal alcanzada a una edad clave especificada tal como 20 o 50 años.

En la realidad, las alturas observadas varían debido a variaciones en las condiciones de crecimiento y a errores de medición. Mas exactamente entonces, ya que la calidad de sitio es una propiedad del sitio, el índice de sitio debe definirse como una cierta altura promedio, más probable, o predicha, que alcanzaría un rodal hipotético creciendo en ese sitio, y no como la altura observada a la edad clave en un rodal determinado.

Para estimar el índice de sitio cuando se tienen alturas a edades distintas de la edad clave, se usan curvas (o ecuaciones) de índice de sitio, que son una familia de curvas que representa las trayectorias $H-t$ para cada valor del índice de sitio (Fig. 2).

Las ecuaciones de índice de sitio (y de crecimiento en altura) más usadas son la de

Richards:⁷

$$[9] \quad H = a(1 - e^{-bt})^{1/c},$$

y la de Korf (Korf 1939, Zarnovican 1979):

$$[10] \quad \ln H = a - \left(\frac{b}{t}\right)^c,$$

ésta última principalmente con $c = 1$ (Schumacher 1939). El concepto tradicional de índice de sitio requiere que un y solo un parámetro (a , b , c , o alguna función de estos) varíe con el sitio, siendo el resto igual para todos los sitios. Una opción común es el tomar a en [9] o [10] como el parámetro índice. En ese caso las curvas se llaman anamórficas, porque las curvas individuales difieren sólo por un cambio de escala en el eje H . Todos los otros tipos de curvas se han llamado polimórficas, lo que puede parecer extraño cuando el parámetro índice es b y las curvas difieren entonces en la escala del eje t .

De acuerdo a la teoría del espacio de estados, el crecimiento en altura y el uso de índices de sitio pueden ser representados por una ecuación diferencial (o en diferencias) [5a], conteniendo un parámetro que varía con la calidad de sitio. Por ejemplo, las formas diferenciales de [9]:

$$[11] \quad \frac{dH}{dt} = \frac{b}{c}(a^c H^{1-c} - H)$$

o de [10]:⁸,

$$[12] \quad \frac{dH}{dt} = \frac{c}{b}H(a - \ln H)^{1+1/c}$$

⁷Llamada también de Chapman-Richards (Pienaar y Turnbull 1973), la ecuación fue usada por von Bertalanffy (1949) en animales y estudiada en detalle por Richards (1959). La frecuentemente mencionada generalización de Richards consiste en permitir c negativos, y raramente es útil. A menudo se cita incorrectamente el título de Chapman (1961). Otra aplicación temprana al crecimiento vegetal fue por Nelder et al. (1960).

⁸Tanto Korf como Schumacher han dado ecuaciones que contienen t en el lado derecho. Este puede reemplazarse en términos de H , obteniéndose [12]

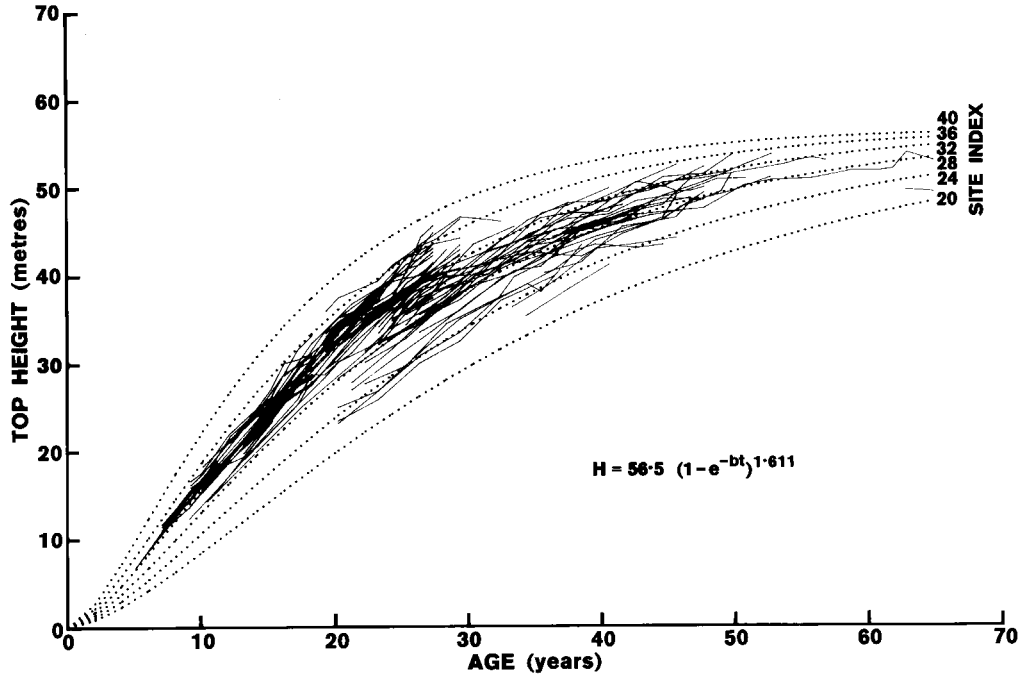


Figura 2: Curvas de índice de sitio (García 1983, reproducción autorizada)

Su integración da las funciones de transición global:

$$[13] H(t) = a[1 - (1 - H(t_0)^c/a^c)e^{-b(t-t_0)}]^{1/c}$$

y

$$[14] \ln H(t) = a - \left[\frac{b}{t - t_0 + b(a - \ln H(t_0))^{-1/c}} \right]^c$$

respectivamente. Las curvas de índice de sitio se obtienen fijando un punto inicial adecuado, por ejemplo $t_0 = 0$ y $H(t_0) = 0$ para [9] y [10]. Estas curvas pueden usarse del modo tradicional, pero también se puede explotar la flexibilidad adicional proporcionada por las funciones de transición (García 1983, Renolls 1994). Algunas posibilidades se exponen a continuación.

En general, los rodales no siguen exactamente una curva de índice de sitio determinada. Cuando aparece una nueva observación altura-edad que se desvía de la tendencia proyectada, el procedimiento usual hace que el rodal siga en adelante la curva que pasa por el nuevo punto (Fig. 2). O sea, se cambia el índice de sitio a aquél para el cuál la función de transición llevaría el origen al nuevo punto. Esto puede racionalizarse si se piensa que la nueva información justifica una actualización de la calidad de sitio estimada. Por otro lado, si pareciera que se tiene una estimación confiable basada en otra información y que la desviación se debe a condiciones climáticas anormales o a otras razones, sería preferible continuar con el nuevo punto altura-edad como condición inicial en la función de transición,

manteniendo el valor del parámetro de sitio estimado anteriormente. Soluciones intermedias entre estos dos extremos son también posibles (Walters et al. 1991). De éste modo, las proyecciones del modelo pueden cortar a través de las curvas de índice de sitio. Obviamente, en ese caso el rodal no alcanzará la altura correspondiente al índice a la edad clave, pero eso es como debería ser.

A veces se podría obtener un mejor ajuste a los datos si las curvas no son forzadas a pasar por el origen, dejando el punto inicial como otro parámetro a ser estimado (de todos modos la mayoría de las curvas de índice de sitio no sirven para rodales muy jóvenes). Mas en general, las malezas, cultivo del suelo y otras técnicas de establecimiento pueden producir variaciones substanciales en el crecimiento inicial en altura. Estos efectos pueden modelarse desplazando el origen de las curvas. Con condiciones de establecimiento desconocidas y un origen flotante, la calidad de sitio podría estimarse dadas dos o más observaciones altura–edad. El sitio es representado por un parámetro de la función de transición que influencia la tasa de crecimiento, pero no determina necesariamente el tamaño alcanzado a una edad dada. Podríamos incluso usar un parámetro de sitio variable en el tiempo para seguir los efectos de cambios en el clima.

Finalmente, es importante tener en cuenta que el índice de sitio es bueno solamente para discriminar entre niveles de producción bajo condiciones de crecimiento razonablemente semejantes. Condiciones diferentes producen no sólo diferencias de nivel, sino que también en la forma de las curvas y en las relaciones entre variables de estado. A menudo es necesaria una estratificación previa en regiones relativamente homogéneas, con el índice de sitio reflejando distinciones locales más finas dentro de las regiones. En principio, una alternativa sería el usar más de un parámetro de sitio, algo así como un índice de sitio multidimensional.

Nótese que cambiando la variable de estado de H a H^c el modelo de Richards [11] puede escribirse como una ecuación diferencial lineal:

$$[15] \quad \frac{dH^c}{dt} = b(a^c - H^c)$$

(verifique calculando la derivada en el lado izquierdo). Esta formulación es matemáticamente conveniente, especialmente cuando se le agrega una estructura estocástica como en la sección siguiente. También se presenta más adelante una generalización a estados multidimensionales.

Estimación de parámetros

Una vez formulado un modelo que contiene parámetros desconocidos, es necesario estimar esos parámetros. Un enfoque racional del problema de estimación requiere contar con algún “metamodelo”⁹, un modelo que describa la estructura de las discrepancias entre modelo y observaciones, usualmente en lenguaje probabilístico. El enfoque más completo y consistente del problema de estimación, el bayesiano – teoría de decisiones, requiere conocer además el costo de todos los posibles errores (una función de pérdidas), y una representación probabilística de toda la información y creencias previas relevantes (una distribución a priori). Desgraciadamente, los costos y consecuencias de los errores que surjan de un modelo variarán con cada uso y con cada usuario, y raramente se pueden especificar en detalle. El uso de información y creencias subjetivas también es un problema, especialmente cuando un modelo va a ser usado por distintas personas.

Los métodos más frecuentemente usados, los de la estadística clásica, se desentienden de pérdidas y distribuciones a priori y tratan de

⁹En literatura reciente sobre simulación este término se ha usado con un significado diferente, para un modelo simplificado del comportamiento de un modelo más complejo

encontrar alguna forma “objetiva” de hacer estimaciones basándose sólo en el (meta)modelo y las observaciones. No es extraño que, dada la naturaleza no bien definida del problema despojado de sus aspectos de toma de decisiones, los resultados no son siempre muy convincentes. Se construyen y evalúan estimadores en términos de satisfacer ciertos criterios más o menos ad-hoc tales como insesgamiento, invariancia, varianza mínima, error cuadrático mínimo, los que en general no se pueden alcanzar conjuntamente. Para una buena exposición de los “que” y “por que” de los varios enfoques en probabilidad y estadística véase Barnett (1973).

Otro problema con la estadística es el condicionamiento a modelos y parámetros “verdaderos”. Típicas aserciones son algo así como “si tal modelo es cierto, entonces...”. Dado que, por definición, un “modelo verdadero” no existe, las conclusiones deben de tomarse con algún escepticismo. A pesar de todo esto, la teoría y métodos estadísticos son extraordinariamente útiles, y aun indispensables en el modelado del crecimiento. Los modelos y técnicas estadísticas nos permiten formular y abordar de modo racional problemas de información incompleta, y producir usualmente soluciones razonables.

Tal vez el método de estimación más útil y de aplicabilidad más general es el método de la máxima verosimilitud (MV). La función de verosimilitud es la probabilidad de que los datos observados sean generados por el modelo (probabilístico), considerada como una función de los parámetros desconocidos. Las estimaciones de MV son aquéllos valores de los parámetros para los cuáles la función de verosimilitud alcanza su valor máximo. Intuitivamente, de todos los valores posibles de los parámetros, las estimaciones máximo-verosímiles son las que tienen la mayor probabilidad de originar una muestra cercana a la observada (Bard 1974).

Bajo ciertas condiciones se puede demostrar

que los estimadores de MV poseen un número de “buenas” propiedades, principalmente asintóticamente para muestras grandes. En ciertas situaciones aproximan o coinciden con resultados bayesianos y con otros métodos de estimación tales como mínimos cuadrados, y en general proporcionan estimaciones aceptables en la mayoría de los casos. Pero la utilidad del método de MV se debe en gran parte a dos características. Primero, no importa cuán complicado el modelo, existe siempre un procedimiento bien definido para obtener estimaciones, al menos en principio. Uno “simplemente” plantea la función de verosimilitud y encuentra su máximo. Segundo, el método de MV es invariante bajo reparametrizaciones, y cualesquiera cantidades calculadas con el modelo con los parámetros reemplazados por sus estimaciones de MV son estimaciones de MV para esas cantidades.

Mínimos cuadrados es un caso especial de MV cuando los residuos para los que se minimiza la suma de cuadrados son independientes y todos tienen la misma distribución normal. En regresión lineal, se puede justificar también el método de los mínimos cuadrados como uno que da la varianza más pequeña entre todos los estimadores insesgados que son funciones lineales de las observaciones, siempre que los residuos sean independientes y tengan todos medias nulas y la misma varianza, aun que no sean normales (el teorema de Gauss-Markoff).

Bard (1974) trata la estimación en sistemas dinámicos (véase también Seber y Wild 1989, Cap. 7). Considérese un modelo

$$[16] \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$$

donde el estado \mathbf{x} es observable y $\boldsymbol{\theta}$ es un vector de parámetros a ser estimados. Los datos consisten en valores de \mathbf{x} para varios t , pero normalmente no medimos directamente los valores de las derivadas. Una primera metodología calcula valores aproximados de las

derivadas en [16] usando diferencias entre observaciones adyacentes. Si (\mathbf{x}_1, t_1) y (\mathbf{x}_2, t_2) son dos observaciones consecutivas, entonces $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/(t_2 - t_1)$ es una aproximación de $d\mathbf{x}/dt$ para $t = (t_1 + t_2)/2$. No se deben usar pares de mediciones donde un tratamiento (por ejemplo un raleo) ha producido un cambio de estado entre las dos fechas de medición. Con todos los pares de mediciones sucesivas apropiados, la ecuación en [16] para cada una de las variables de estado puede entonces ser ajustada por mínimos cuadrados, por ejemplo.

El ajustar las ecuaciones en forma separada puede no dar los mejores resultados si sus errores están correlacionados, y no es factible si algún parámetro aparece en más de una de las ecuaciones (Burkhart 1986). Para estas situaciones llamadas de multirrespuesta, Box y Draper (1965) usando argumentos bayesianos recomendaron estimar minimizando el determinante de la matriz de momentos conjuntos de la muestra (ver también Hunter (1967), Bates y Watts (1985), Stewart (1987), Kang y Bates (1990) y referencias allí citadas). Bard (1974, sección 4-9) obtuvo el mismo criterio de minimización del determinante con el método de MV. Nótese también que errores de medición causarían autocorrelación, véase más abajo la discusión que sigue a [19].

Por su sencillez, el ajuste directo de [16] con derivadas aproximadas puede ser la mejor opción en muchos casos, aunque Bard objeta que su exactitud es severamente limitada y los errores difíciles de evaluar. Si el modelo usa ecuaciones en diferencias en lugar de ecuaciones diferenciales y el espaciado de las observaciones corresponde a los intervalos de las diferencias, entonces no hay error de aproximación. Con observaciones frecuentes uniformemente espaciadas, los errores pueden ser aceptables. Sin embargo, el método no puede usarse con efectividad si la separación entre los datos es grande y/o irregular.

La segunda metodología se basa en integrar [16], obteniendo la función de transición global

$$[17] \quad \mathbf{x} = \mathbf{F}(t - t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta}) .$$

(Una tercera metodología tratada por Bard, usando integración numérica de los datos, no parece aplicable a nuestros problemas). Las condiciones iniciales \mathbf{x}_0 en t_0 son usualmente conocidas (medidas); si no, se pueden incluir como parámetros adicionales a ser estimados. Sólo casos donde [17] se puede obtener analíticamente en forma cerrada parecen haberse considerado en el campo forestal, aunque, en principio, también podría usarse integración numérica. A menudo, en índices de sitio y en modelos de crecimiento de tipo estático, el modelo ya es dado como una función del tiempo en esta forma.

Una característica de estos problemas es que los datos consisten en muchas series disjuntas de observaciones, cada una de ellas representada por [17], posiblemente con condiciones iniciales diferentes. Esto se llama a veces datos de panel, que son una combinación de datos de tipo transversal, donde se hace una observación en cada individuo, y datos de tipo longitudinal, donde se hace una secuencia de observaciones en un solo individuo. Como de costumbre, el obtener buenos estimadores para los parámetros desconocidos necesita de supuestos razonables sobre la estructura de errores. Específicamente, para usar el método de MV o métodos bayesianos necesitamos una aproximación para la densidad de probabilidad conjunta de todas las observaciones (la función de verosimilitud). Para mínimos cuadrados necesitamos formar residuos independientes e idénticamente distribuidos.

Generalmente la correlación entre individuos no es demasiado importante y puede ignorarse, de modo que sólo es necesario considerar la distribución de la secuencia de observaciones para un individuo (pero véase García

1983 para más detalles sobre este punto). Observamos $\{(t_1, \mathbf{x}_1), (t_2, \mathbf{x}_2), \dots, (t_m, \mathbf{x}_m)\}$. Estos seguirían [17], excepto por dos fuentes principales de variación: errores de medición (incluyendo posibles errores de muestreo) y un ambiente que varía en forma impredecible.

Un camino comúnmente empleado es el uso de mínimos cuadrados bajo el modelo

$$[18] \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{F}(t_i - t_0, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\epsilon}_i ; \\ i = 1, 2, \dots, m$$

Esto se ha hecho en modelos univariantes o una ecuación a la vez, donde los \mathbf{x}_i son escalares (o sea, no vectores). En situaciones de multirrespuesta se podría usar el criterio de minimización del determinante.

Se puede esperar que este método funcione bien si los $\boldsymbol{\epsilon}_i$ son aproximadamente independientes e idénticamente distribuidos. Este es el caso si las desviaciones del modelo se deben principalmente a error de medición (se puede usar transformaciones para homogeneizar las varianzas). Por otro lado, si las trayectorias son perturbadas por variación ambiental estas perturbaciones tienen un efecto acumulativo, haciendo que los $\boldsymbol{\epsilon}_i$ estén correlacionados y tengan varianzas crecientes en el tiempo. Para ver el porqué, nótese que el valor realizado de \mathbf{x} al tiempo t_{i+1} depende del valor en t_i , a través de [17], y de las perturbaciones entre t_i y t_{i+1} , y a su vez el valor en t_i se desvía de la trayectoria nominal debido a perturbaciones ocurridas antes de t_i .

Fallando el supuesto de errores incorrelacionados, los estimadores de mínimos cuadrados basados en [18] pueden ser ineficientes y los errores pueden ser fuertemente subestimados (Sullivan y Reynolds 1976, Seber y Wild 1989, sección 7.4). Una posibilidad es el tomar en cuenta la correlación de los errores con técnicas como mínimos cuadrados generalizados o modelos de series temporales autorregresivas. Hay una extensa literatura sobre modelos de

correlación desde este punto de vista (Jones 1993, Magnussen y Park 1991, Seber y Wild 1989, Cap. 6 y referencias allí citadas). Con mezclas de datos transversales y longitudinales, sin embargo, las estructuras de correlación plausibles son complejas y el enfoque es al menos “algo burdo” (Seber y Wild 1989, p.344). Una alternativa más orientada a los procesos parece entonces más atractiva.

En vez de [18] podemos considerar

$$[19] \quad \mathbf{x}_i = \mathbf{F}(t_i - t_{i-1}, \mathbf{x}_{i-1}, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\epsilon}_i ; \\ i = 1, 2, \dots, m$$

Como una primera aproximación es razonable suponer que las fluctuaciones ambientales son del tipo “ruido blanco”. O sea, las fluctuaciones dentro de algún intervalo de tiempo son independientes de aquéllas en otros intervalos, al menos aproximadamente y en una escala temporal adecuada (pero, de nuevo, ver García 1983). Si además los errores de medición son comparativamente poco importantes, los $\boldsymbol{\epsilon}_i$ en [19] se pueden tomar como no correlacionados.

Bajo los supuestos anteriores, si las observaciones están uniformemente espaciadas en el tiempo tenemos entonces esencialmente el caso de diferencias finitas ya analizado, y mínimos cuadrados o minimización del determinante de la matriz de momentos para [19] sería apropiado. Si, al contrario, la separación entre observaciones varía substancialmente, podría valer la pena modelar como la varianza de $\boldsymbol{\epsilon}_i$ cambia con la longitud del intervalo. Esto ha sido hecho, por ejemplo, por García (1979, 1984) integrando ecuaciones diferenciales que incluyen un proceso de ruido blanco, y por Candy (1989) usando modelos lineales generalizados. Seber y Wild (1989, sección 7.5) y Jones y Ackerson (1990) presentan varias alternativas.

Cuando tanto las fuentes de variación ambientales y por medición son importantes la situación es más complicada. Los $\boldsymbol{\epsilon}_i$ en [19] se correlacionan porque intervalos consecutivos comparten una medición común. Se ha

usado un modelo basado en [15] con términos representando ambas causas de error, aunque el método de MV raramente pudo estimar separadamente las dos varianzas (para los detalles véase García (1983) o Seber y Wild (1989, sección 7.5.3)).

En general, la estructura de errores para un sistema dinámico puede modelarse a través de una entrada \mathbf{u} en la función de transición [3] donde \mathbf{u} es un proceso estocástico que representa las fluctuaciones ambientales, y una función de salida [4] que dé los valores observados en función de los valores reales y de los errores de medición. El problema es idear modelos que sean suficientemente realistas y al mismo tiempo matemáticamente tratables.

Al tratar de mejorar los métodos de estimación las matemáticas se complican cada vez más, y el esfuerzo computacional aumenta rápidamente. Es difícil saber en un caso particular cuánto refinamiento producirá mejoras que valgan la pena. Se puede argumentar, sin embargo, que con trabajos de terreno costosos en tiempo y dinero y con un poder computacional creciente, hay pocas excusas para no intentar extraer de los datos tanta información como sea posible.

El modelo de Richards multivariante

La teoría de espacios de estado expuesta arriba es completamente general, habiendo muchas posibilidades en la elección de ecuaciones y vectores de estado. Un ejemplo específico puede ayudar para ilustrar las ideas.

En el desarrollo de una serie de modelos de crecimiento regionales para plantaciones de pino radiata (*Pinus radiata* D. Don) en Nueva Zelanda se decidió usar modelos empíricos suficientemente flexibles para ajustarse a los patrones de desarrollo observados, sin atenerse

a ideas preconcebidas. Se consideraron adecuadas, al menos en una primera etapa, variables a nivel de rodal basadas en altura dominante, área basal y árboles por hectárea, posiblemente agregando el nivel de copa verde u otra medida de cierre del dosel. Para obtener procedimientos de estimación eficientes era deseable también que la forma del modelo fuera matemáticamente tratable. En particular, debería ser posible integrar analíticamente las funciones de transición. (García 1979, 1988a).

Supóngase que las variables de estado son la altura dominante, área basal y árboles por hectárea, constituyendo un vector de estado $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (H, B, N)$. Una opción conveniente y fácil de usar para la función de transición local [3] sería un sistema de ecuaciones diferenciales lineales (EDLs), donde las f_i en [8] son lineales en H , B y N . Desgraciadamente las EDLs no son muy flexibles; una EDL unidimensional [8a] es llamada el modelo de Mistcherlich o monomolecular, y produce curvas sin un punto de inflexión que raramente representan bien el crecimiento de los árboles. Resultados algo mejores se obtuvieron con un sistema de EDLs en los logaritmos de las variables de estado. Este es una generalización a varias variables del modelo de Gompertz, y su desarrollo fue continuado por Minowa (1982, 1983a, 1983b).

La flexibilidad deseada se obtuvo finalmente con transformaciones a potencias de la forma

$$[20] H^\alpha B^\beta N^\gamma$$

En lugar de \mathbf{x} usamos el vector de estado equivalente:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (y_1, y_2, y_3) \\ &= (H^{c_{11}}, H^{c_{21}} B^{c_{22}} N^{c_{23}}, \\ &\quad H^{c_{31}} B^{c_{32}} N^{c_{33}}) \end{aligned}$$

Se supone que las nuevas variables de estado siguen el sistema de EDLs:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + b_1$$

$$\begin{aligned}\frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + b_2 \\ \frac{dy_3}{dt} &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + b_3\end{aligned}$$

Los coeficientes a_{ij} , b_i y c_{ij} son valores conocidos o parámetros a estimarse, posiblemente funciones del índice de sitio. Abreviado con vectores y matrices esto es

$$[21] \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

con los parámetros agrupados en la matriz \mathbf{A} de 3×3 y en el vector \mathbf{b} de largo 3.

La primera EDL es el modelo de Richards [15]. El sistema completo puede verse como una generalización tridimensional de éste si notamos que, con la matriz \mathbf{C} de 3×3 conteniendo los coeficientes c_{ij} :¹⁰

$$\ln \mathbf{y} = \mathbf{C} \ln \mathbf{x}$$

y definimos por lo tanto:

$$\mathbf{y} = \exp[\mathbf{C} \ln \mathbf{x}] \equiv \mathbf{x}^{\mathbf{C}}$$

Entonces, [21] se puede escribir como

$$[22] \quad \frac{d\mathbf{x}^{\mathbf{C}}}{dt} = \mathbf{B}(\mathbf{a}^{\mathbf{C}} - \mathbf{x}^{\mathbf{C}})$$

que es análogo a [15]. Es claro que esto vale también para dimensiones distintas de tres.

Aparte de su flexibilidad y de la analogía con la función de Richards, un aspecto atractivo de este modelo surge del hecho que muchas variables forestales son proporcionales a algún caso particular de [20]. Por ejemplo, el DAP medio (diámetro medio cuadrático a la altura del pecho, $H^0 B^{0.5} N^{-0.5}$), el espaciamiento medio ($H^0 B^0 N^{-0.5}$), el espaciamiento relativo de Hart-Becking ($H^{-1} B^0 N^{-0.5}$), el índice de densidad de Réineke ($H^0 B^{0.8} N^1$), algunas

¹⁰El logaritmo de un vector es el vector de logaritmos de sus elementos. Análogamente, el exponente de un vector se define como el vector de los exponentes de sus elementos.

aproximaciones del volumen ($H^1 B^1 N^0$ más una constante o $H^\alpha B^\beta N^0$ en ecuaciones de volumen logarítmicas). El usar cualquier conjunto independiente de éstas para \mathbf{x} no cambia la forma de [22], reduciendo lo arbitrario de una elección particular de variables de estado.

La integración de [22] entre t_0 y t da la función de transición global (compárese con [13])

$$[23] \quad \mathbf{x}(t) = [\mathbf{a}^{\mathbf{C}} - e^{-\mathbf{B}(t-t_0)}(\mathbf{a}^{\mathbf{C}} - \mathbf{x}(t_0)^{\mathbf{C}})]^{\mathbf{C}^{-1}}$$

que predice \mathbf{x} para cualquier tiempo t tal que no haya cambios de estado causados por raleos o podas entre t_0 y t . El exponencial matricial se puede calcular como

$$e^{-\mathbf{B}(t-t_0)} = \mathbf{P}^{-1} e^{-\mathbf{\Lambda}(t-t_0)} \mathbf{P}$$

con la descomposición en valores propios $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}$, donde $\mathbf{\Lambda}$ es diagonal (otras alternativas son presentadas por Moler y Loan 1978).

Se puede construir un proceso estocástico matemáticamente tratable agregando ruido blanco en el lado derecho de [22]. Este ha sido usado para aproximar los efectos de la variación ambiental con fines de estimación de parámetros. Se obtiene una expresión en forma cerrada para la función de verosimilitud, y las estimaciones de MV se calculan por optimización numérica. También se ha probado el método más sencillo de aproximación diferencial, con valores fijos de \mathbf{C} los que pueden elegirse iterativamente.

La ecuación [22] constituye una clase bastante general de modelos que podrían usarse para muchos sistemas dinámicos. En aplicaciones específicas a modelos de crecimiento, ciertos aspectos necesitan ser definidos. Estos incluyen la selección de variables de estado, la forma en que el sitio entra en las ecuaciones, restricciones en valores de los parámetros, y la implementación de procedimientos de estimación. En modelos de los efectos del cierre del dosel, deficiencias nutritivas y mejoramiento genético se ha encontrado útil reemplazar t

por funciones que representan cierto “tiempo fisiológico” (Nelder et al. 1960). Detalles se pueden encontrar en García (1984, 1979, 1984, 1988a, 1989, 1991).

Aunque el modelo de Richards multivariante, al igual que su análogo univariante puede comportarse de forma razonable al ser extrapolado y en situaciones límite, es esencialmente empírico, representando solamente un resumen conveniente de datos observados. Se ha demostrado también (García 1990, 1993) que las ideas de espacio de estados y la experiencia con este tipo de modelo pueden ser útiles en estudios más mecanísticos del crecimiento forestal.

Resumen y conclusiones

Una vez explicadas y comprendidas, las ideas de espacio de estados son muy simples y susceptibles de ser vistas como obvias o bien conocidas. Sin embargo aun existe mucha confusión sobre el manejo apropiado de funciones del tiempo. El ignorar la necesidad de descripciones de estado multidimensionales adecuadas puede estar detrás de “. . . la tendencia del biólogo a juntar un montón de cantidades relacionadas de alguna manera arbitraria para formar el Coeficiente de Esto y el Índice de Aquello. . .” (S. C. Pearce en la discusión de Mead y Riley 1981). El punto de vista de la teoría de sistemas nos puede ayudar a entender mejor que en el pasado los fundamentos de los modelos de crecimiento y los varios métodos que se han usado.

El abandono generalizado de los modelos a nivel de rodal en favor de los de árboles individuales, más de moda, puede que no se justifique, al menos no para rodales puros coetáneos y homogéneos. Es probable que vectores de estado grandes contengan mucha información redundante, con pérdidas consecuentes de precisión (sobre-parametrización), además de ser

costoso o imposible el obtener valores confiables en el terreno. Además, el ignorar correlaciones de micro-sitio en modelos de árboles individuales puede producir resultados poco realistas y engañosos. Métodos mejorados pueden producir buenas predicciones de la dinámica de cantidades a nivel de rodal, y parece prudente transferir a la función de salida las más cuestionables estimaciones de distribución.

Los supuestos detrás del desarrollo y uso de curvas de índice de sitio se pueden hacer explícitos y sus fundamentos pueden aclararse en un contexto de espacio de estados. Existen posibilidades para métodos más sofisticados de clasificación de sitios usando orígenes flotantes e índices multivariantes.

Los usuarios deberían estar conscientes de algunos asuntos conceptuales para entender las propiedades y limitaciones de los métodos estadísticos y para interpretar correctamente los resultados. Los datos de crecimiento presentan características estadísticas especiales que dificultan el desarrollo de métodos de estimación completamente satisfactorios. Aun así, algún modelo estadístico de la estructura de errores, por aproximado que sea, es necesario para seleccionar estimaciones en forma racional. Deberían evitarse los procedimientos ad-hoc que contienen supuestos ocultos.

Puede ser útil clasificar los métodos de estimación de parámetros para sistemas dinámicos en cuatro grupos: (i) aproximación diferencial, o el primer método de Bard, donde se usa directamente [16]; (ii) determinísticos (Seber y Wild 1989, sección 7.4), donde se hace un supuesto implícito o explícito de errores independientes en [18]; (iii) errores correlacionados, donde se adopta alguna estructura de correlaciones para [18] (la estructura puede ser derivada a través de modelos de tasas como funciones del tiempo, Seber y Wild 1989, sección 7.5.2); (iv) procesos estocásticos, donde estos, obtenidos por la inclusión de elementos aleatorios en un modelo dinámico, se usan pa-

ra derivar estructuras de error para [19], no necesariamente aditivas (pueden verse como representando tasas como funciones del estado, Seber y Wild 1989, sección 7.5.3). Pueden ocurrir traslapos, por ejemplo entre (i) y (iv) para observaciones uniformemente espaciadas, y es posible tener combinaciones tales como (iv) y (ii) (García 1983).

Referencias

- Bailey, R. L. y Clutter, J. L. (1974). Base-age invariant polymorphic site curves. *For. Sci.*, 20, 155–159.
- Bard, Y. (1974). *Nonlinear Parameter Estimation*. Academic Press, New York.
- Barnett, V. (1973). *Comparative Statistical Inference*. Wiley, London.
- Bates, D. M. y Watts, D. G. (1985). Multiresponse estimation with special application to linear systems of differential equations (with Discussion). *Technometrics*, 27, 329–353.
- Bowling, E. H., Burkhart, H. E., Burk, T. E., y Beck, D. E. (1989). A stand-level multispecies growth model for Appalachian hardwoods. *Can. J. For. Res.*, 19, 405–412.
- Box, G. E. P. y Draper, N. R. (1965). The Bayesian estimation of common parameters from several responses. *Biometrika*, 52, 355–365.
- Bruce, D. y Wensel, L. C. (1988). Modelling forest growth: Approaches, definitions, and problems. In Ek, A. R., Shifley, S. R., y Burke, T. E. (Eds.), *Forest Growth Modelling and Prediction*, p. 1–8. USDA For. Serv. Gen. Tech. Rep. NC-120.
- Bunnell, F. L. (1989). Alchemy and uncertainty: What good are models?. Gen. Tech. Rep. PNW-GTR-232, USDA For. Serv.
- Burkhart, H. E. (1986). New developments in growth and yield prediction. In Carpenter, S. B. (Ed.), *Southern Forestry Symposium, November 19–21, 1986* Atlanta, Ga. Agricultural Conference Services, Oklahoma State University.
- Candy, S. G. (1989). Growth and yield models for *pinus radiata* in Tasmania. *N. Z. J. For. Sci.*, 19, 112–133.
- Chapman, D. G. (1961). Statistical problems in dynamics of exploited fisheries populations. In *Fourth Berkeley Symposium — Mathematical Statistics and Probability, Proceedings*, p. 153–168 Berkeley. University of California Press.
- Clutter, J. L. (1963). Compatible growth and yield models for loblolly pine. *For. Sci.*, 9, 354–371.
- Clutter, J. L., Fortson, J. C., Pienaar, L. V., Brister, G. H., y Bailey, R. L. (1983). *Timber Management: A Quantitative Approach*. Wiley, London.
- Clutter, J. L. y Lenhart, J. D. (1968). Site index curves for old-field loblolly pine plantations in the Georgia Piedmont. Ser. 1. Rep. 22, Georgia Forestry Research Council, Macon.
- Decourt, N. (1974). Remarque sur une relation dendrométrique inattendue — conséquences méthodologiques pour la construction des tables de production. *Ann. Sci. For.*, 31, 47–55.
- Fries, J. (1974). Praktisk bonitering. *Sver. Skogsvårdsförb. Tidskr.*, 72, 559–563.

- García, O. (1974). Sobre modelos matemáticos de rodal. Informe Técnico 48, Instituto Forestal, Santiago, Chile.
- García, O. (1979). Modelling stand development with stochastic differential equations. In Elliott, D. E. (Ed.), *Mensuration Systems for Forest Management Planning*, p. 315–334 For. Res. Inst. Symp. 20. New Zealand Forest Service, Rotorua.
- García, O. (1983). A stochastic differential equation model for the height growth of forest stands. *Biometrics*, 39, 1059–1072.
- García, O. (1984). New class of growth models for even-aged stands: *Pinus radiata* in Golden Downs Forest. *N. Z. J. For. Sci.*, 14(1), 65–88.
- García, O. (1988a). Experience with an advanced growth modelling methodology. In Ek, A. R., Shifley, S. R., y Burke, T. E. (Eds.), *Forest Growth Modelling and Prediction*, p. 668–675. USDA For. Serv. Gen. Tech. Rep. NC-120.
- García, O. (1988b). Growth modelling — A (re)view. *N. Z. For.*, 33(3), 14–17.
- García, O. (1989). Growth modelling — new developments. In Nagumo, H. y Konohira, Y. (Eds.), *Japan and New Zealand Symposium on Forestry Management Planning, 3–5 October 1988*, p. 152–158. Japan Association for Forestry Statistics.
- García, O. (1990). Growth of thinned and pruned stands. In James, R. N. y Tarlton, G. L. (Eds.), *New Approaches to Spacing and Thinning in Plantation Forestry: Proceedings of an IUFRO Symposium, 10–14 Apr. 1989*, p. 84–97
- Rotorua, N. Z. Ministry of Forestry, Rotorua. FRI Bull. 151.
- García, O. (1991). A system for the differentiation of FORTRAN code and an application to parameter estimation in forest growth models. In Griewank, A. y Corliss, G. F. (Eds.), *Automatic Differentiation of Algorithms: Theory, Implementation, and Application*, p. 273–285. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- García, O. (1992). What is a diameter distribution?. In Minowa, M. y Tsuyuki, S. (Eds.), *Proceedings of the Symposium on Integrated Forest Management Information Systems, 13–18 October 1991*, p. 11–29 Tsukuba, Japan. Japan Society of Forest Planning Press.
- García, O. (1993). Stand growth models: Theory and practice. In *Advancement in Forest Inventory and Forest Management Sciences — Proceedings of the IUFRO Seoul Conference, 20–25 September 1993*, p. 22–45 Seoul. Forestry Research Institute of the Republic of Korea.
- Hunter, W. G. (1967). Estimation of unknown constants from multiresponse data. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 6, 461–463.
- Jones, R. H. (1993). *Longitudinal Data with Serial Correlation: A State-space Approach*. Chapman & Hall, London.
- Jones, R. H. y Ackerson, L. M. (1990). Serial correlation in unequally spaced longitudinal data. *Biometrika*, 77, 721–731.
- Kalman, R. E., Falb, P. L., y Arbib, M. A. (1969). *Topics in Mathematical System Theory*. McGraw-Hill, New York.

- Kang, G. y Bates, D. M. (1990). Approximate inferences in multiresponse regression analysis. *Biometrika*, 77, 321–331.
- Korf, V. (1939). Prispěvek k matematické definici vzrůstového zákona hmot lesních porostů. *Lesn. Pr.*, 18, 339–379. Citado por Zarnovican (1979).
- Leary, R. A. (1975). Nonlinear functional equation models of forest dynamics. In Ek, A. R., Balsiger, J. W., y Promnitz, L. C. (Eds.), *Forest Modelling and Inventory - Selected papers from the 1973 and 1974 meetings of the Midwest Mensurationists*, p. 20–36. School of Natural Resources, University of Wisconsin-Madison, and Society of American Foresters.
- Magnussen, S. y Park, Y. S. (1991). Growth-curve differentiation among Japanese larch provenances. *Can. J. For. Res.*, 21, 504–513.
- Matérn, B. (1976). Om skattning av övre höjden. *Sver. Skogsvårdsförb. Tidskr.*, 74, 51–53.
- Mead, R. y Riley, J. (1981). A review of statistical ideas relevant to intercropping research (with Discussion). *J. R. Stat. Soc. A*, 144, 462–509.
- Minowa, M. (1982). A theoretical approach to forest growth modeling — I. The log-Mistcherlich theory (en japonés). *J. Jpn. For. Soc.*, 64, 461–467.
- Minowa, M. (1983a). A theoretical approach to forest growth modeling — II. Further discussion on the self-thinning model (en japonés). *J. Jpn. For. Soc.*, 65, 135–142.
- Minowa, M. (1983b). A theoretical approach to forest growth modeling — III. Three-dimensional log-Mistcherlich equation system (en japonés). *J. Jpn. For. Soc.*, 65, 417–426.
- Moler, C. y Loan, C. V. (1978). Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. *SIAM Rev.*, 20, 801–836.
- Nelder, J. A., Austin, R. B., Bleasdale, J. K. A., y Salter, P. J. (1960). An approach to the study of yearly and other variation in crop yields. *J. Hort. Sci.*, 35, 73–82.
- Padulo, L. y Arbib, M. A. (1974). *System Theory*. Hemisphere Pub. Co., Washington, D.C.
- Pienaar, L. V. y Turnbull, K. J. (1973). The Chapman-Richards generalization of von Bertalanffy's growth model for basal area growth and yield in even-aged stands. *For. Sci.*, 19, 2–22.
- Rennolls, K. (1978). "Top height"; its definition and estimation. *Commonw. For. Rev.*, 57, 215–219.
- Rennolls, K. (1994). Forest height growth modelling. *For. Ecol. Manage.* (Por aparecer).
- Richards, F. J. (1959). A flexible growth function for empirical use. *J. Exp. Bot.*, 10, 290–300.
- Schumacher, F. X. (1939). A new growth curve and its application to timber-yield studies. *J. For.*, 37, 819–820.
- Seber, G. A. F. y Wild, C. J. (1989). *Nonlinear Regression*. Wiley, New York.
- Stewart, W. E. (1987). Multiresponse parameter estimation with a new and noninformative prior. *Biometrika*, 74, 557–562.

- Sullivan, A. D. y Clutter, J. L. (1972). A simultaneous growth and yield model for loblolly pine. *For. Sci.*, 18, 76–86.
- Sullivan, A. D. y Reynolds, Jr., M. R. (1976). Regression problems from repeated measurements. *For. Sci.*, 22, 382–385.
- von Bertalanffy, L. (1949). Problems of organic growth. *Nature (London)*, 163, 156–158.
- Walters, D. K., Burkhart, H. E., Reynolds, Jr., M. R., y Gregoire, T. G. (1991). A Kalman filter approach to localizing height-age equations. *For. Sci.*, 37, 1526–1537.
- Wiberg, D. M. (1971). *State Space and Linear Systems*. Shaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York.
- Zadeh, L. A. (1969). The concepts of system, aggregate, and state in system theory. In Zadeh, L. A. y Polak, E. (Eds.), *System Theory*. McGraw-Hill, New York.
- Zarnovican, R. (1979). Fonction de la croissance de Korf. *For. Chron.*, 55, 194–197.