Modelos de Crecimiento — una (Re)visión *

O. Garcia†

Los modelos de crecimiento son vitales para la planificación del manejo forestal. Proyectar el crecimiento y rendimiento de rodales individuales es un prerequisito para planear el manejo de los montes a cualquier nivel. Por lo tanto los gestores necesitan tener cierto conocimiento de las varias técnicas de modelado del crecimiento y de sus limitaciones.

Más que una revisión de modelos de crecimiento, esto es un examen de principios básicos como yo los veo. Una revisión exhaustiva tomaría demasiado espacio, sería probablemente de más interés para el especialista, y ha sido ya hecha en cierta medida en algunas de las publicaciones citadas a continuación. En lugar de ello, he apuntado a una contribución hacia una mejor comprensión de la literatura relevante.

El enfoque es sobre técnicas de modelado apropiadas para rodales coetáneos. Las referencias seleccionadas para ilustrar los varios métodos son una muestra más o menos aleatoria. Sin embargo, siguiendo la tradición, se incluyen solamente publicaciones en inglés y la muestra tiene un sesgo importante hacia los trabajos del autor.

Los modelos de crecimiento neocelandeses han sido descritos por Goulding (1986).

Fundamentos

Los modelos de crecimiento "estáticos" (Alder 1980) intentan predecir directamente el curso en el tiempo de las cantidades de interés (volúmenes, diámetro medio). Ejemplos de estos son las Tablas de Manejo de la Forestry Commission (Johnston y Bradley 1963) y las Tablas de Rendimiento de Australia del Sur (Lewis, Keeves, y Leech 1976). Este enfoque puede dar buenos resultados para rodales no clareados, o para rodales sometidos a un rango estrecho de tratamientos estándar para los cuales se dispone de datos experimentales de largo plazo.

Para proyectar sobre un rango más amplio de regímenes selvícolas (espaciamiento inicial, varias secuencias e intensidades de claras y podas) se necesitan modelos dinámicos. En lugar de modelar directamente el curso de las cantidades en el tiempo, estos modelos predicen tasas de cambio bajo condiciones variadas. Las trayectorias en el tiempo se obtienen entonces sumando o integrando estas tasas.

El modelado del crecimiento puede aclararse a través de algunos conceptos básicos muy simples que por largo tiempo han sido fundamentales en otras disciplinas. Esencialmente, la evolución en el tiempo de cualquier sistema puede modelarse especificando:

1. Una descripción adecuada del sistema en cualquier punto del tiempo (el "estado" del sistema).
2. La tasa de cambio de estado en función del estado actual y del valor actual de posibles variables externas de control (una "función de transición local").

El estado debe ser tal que, con suficiente aproximación: (a) estados futuros quedan determinados por el estado actual y acciones futuras, y (b) cualesquiera características de interés pueden obtenerse del estado. El estado es descrito a menudo por un número fijo de variables (variables de estado, que forman un vector de estado). Puede incluir también objetos matemáticos más complicados tales como secuencias infinitas o funciones. Las funciones de transición se dan típicamente como un sistema de ecuaciones diferenciales o en diferencias, que describen la tasa de cambio de cada una de las variables de estado. Alternativamente, podrían especificarse gráficamente, o a través de algún algoritmo computacional más o menos complicado.

Ilustremos estos conceptos en el contexto de los modelos de crecimiento. En primer lugar, generalmente no

* Traducción de "Growth modelling — a (re)view", *New Zealand Forestry 33*(3), 14–17, 1988.

† El autor, Oscar Garcia, es un científico en el grupo de investigación Forest Mensuration and Management Systems, Forest Research Institute, Rotorua, Nueva Zelanda. Una versión anterior de este artículo apareció en la Newsletter No.2 del grupo de trabajo de IUFRO "Management Planning and Managerial Economics in Short Rotation Timber Plantations", Marzo 1986.

es necesario incluir variables de control en la función de transición. Los tratamientos selvícolas (por ejemplo claras) normalmente ocurren en puntos discretos del tiempo, causando un cambio de estado instantáneo. Podemos entonces modelar los cambios de estado entre tratamientos sucesivos como una función solamente del estado actual, sin variables de control.

Consideremos la altura dominante, H, como una descripción de estado para un rodal. Esta satisface la condición (a), ya que la tasa de cambio en H (incremento en altura) puede modelarse adecuadamente como una función del H actual: $\Delta H = f(H)$, o $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = g(H)$. El curso de H en el tiempo se puede obtener acumulando o integrando los incrementos, partiendo de una altura inicial dada. Si nos interesa el volumen por hectárea, H no es una buena descripción de estado según la condición (b): además de H el volumen depende también del área basimétrica. El modelo puede ser sin embargo adecuado para otros usos, por ejemplo para la clasificación de calidades de estación.

Consideremos ahora el volumen total por hectárea como una descripción de estado. Si estamos interesados en proyectar esta cantidad, entonces obviamente satisface la condición (b) (aunque probablemente no sería suficiente si estuviéramos también interesados en volúmenes comerciales). Sin embargo, la condición (a) falla porque, bajo un rango amplio de tratamientos, el incremento en volumen sería diferente para rodales con el mismo volumen pero alturas y/o densidades muy distintas.

Parece ser que un estado unidimensional es inadecuado para modelar el crecimiento. Consideremos entonces el estado descrito por tres variables: área basimétrica (G), árboles por hectárea (N), y altura dominante (H). O sea, el estado es el vector tridimensional $\mathbf{x} = (G, N, H)$. En muchos casos esto satisface la condición (a), los cambios en $\mathbf{x}$ para una amplia variedad de tratamientos siendo bien aproximados por una función de $\mathbf{x}$, $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, o sea, por un sistema de tres ecuaciones: $\Delta G = f_1(G, N, H)$, $\Delta N = f_2(G, N, H)$, $\Delta H = f_3(G, N, H)$. A menudo este vector de estado es satisfactorio también según (b), pudiéndose estimar volúmenes de productos, valores monetarios y parámetros de distribuciones por regresión en G, N y H. Nótese que cualquier transformación uno a uno serviría igual, por ejemplo diámetro medio, espaciamiento medio y altura dominante. En algunos casos, sin embargo, puede necesitarse una descripción de estado más detallada.

Además de las funciones de transición que dan crecimiento y mortalidad, la mayoría de los modelos de crecimiento contienen también varias relaciones auxiliares. Entre éstas generalmente hay ecuaciones para estimar el cambio instantáneo en las variables de estado debido a tratamientos (por ejemplo el cambio en área basimétrica producido por una clara de cierto número de árboles por hectárea), y para estimar volúmenes de varios productos dado el estado.

La proyección puede hacerse usando formas integradas de la función de transición local, o a través de acumulación o integración numérica. Es útil no confundir un modelo de crecimiento con su implementación en ordenador. Diferentes implementaciones del mismo modelo pueden ser apropiadas para distintos usos (proyecciones de largo plazo, evaluación de regímenes selvícolas, actualización de registros de rodal).

Para más sobre el enfoque del espacio de estados en el modelado del crecimiento véase García (1979). Incidentalmente, estas ideas son aplicables a cualquier sistema dinámico, y en particular, a modelos para la planificación del manejo forestal (García 1984a).

Tipos de modelos de crecimiento

Los modelos de crecimiento dinámicos pueden clasificarse de acuerdo al nivel de detalle en la descripción de estado, como sigue:

Los modelos a nivel de rodal describen el estado del rodal con unas pocas variables que representan agregados a nivel de rodal tales como área basimétrica, diámetro medio, volumen por hectárea, árboles por hectárea, espaciamiento medio, altura dominante, etc. A veces se usan también parámetros de distribuciones de diámetro y/o altura, aunque más frecuentemente estos son estimados *a posteriori* como funciones de las variables de estado. La función de transición es dada generalmente como un sistema de ecuaciones diferenciales o en diferencias para las tasas de cambio de las variables de estado (crecimiento y mortalidad). También se han usado métodos gráficos.

En la mayoría de las situaciones, este tipo de modelo probablemente sea el más adecuado para planificación del manejo de plantaciones forestales. Algunos ejemplos son Beekhuis (1966), Alder (1980) y García (1984b, 1988). Otros trabajos publicados entre 1973 y 1976 se indican, con resúmenes, en CAB (1977).

Los modelos de posición de árbol, o modelos de árbol individual dependientes de distancia, usan una descripción de estado mucho más detallada. Esta incluye la ubicación (coordenadas) y diámetro, y a veces altura y dimensiones de copa, de cada árbol en una parcela de muestra. El crecimiento y probabilidades de mortalidad para cada árbol se expresan como funciones de sus dimensiones y de la posición relativa y dimensiones de sus vecinos. Ejemplos representativos incluyen Newnham (1964, 1968), van Laar (1969), Mitchell (1975), y Tennent (1982). Véase también Dudek y Ek (1980).

Estos modelos pueden ser útiles como herramientas de investigación para estudiar prácticas que afectan las relaciones espaciales en formas que las variables de nivel de rodal no pueden describir satisfactoriamente; por ejemplo, claras por hileras u otros diseños sistemáticos, manejo de rodales con mezclas de especies, o podas selectivas intensas. Pueden también dar ideas sobre la dinámica de rodales que podrían contribuir al desarrollo de mejores modelos de rodal. El uso directo de estos modelos en el manejo se ve dificultado por su alto costo computacional y por la información de inventarios altamente detallada que requerirían. En la práctica frecuentemente se usa una descripción a nivel de rodal para generar una muestra ficticia de posiciones y tamaños de árboles individuales, la que luego se usa como entrada para el modelo. Esto es conceptualmente equivalente a un modelo a nivel de rodal, con una función de transición bastante complicada.

Los modelos de árbol individual independientes de distancia describen el estado con datos de árboles individuales, pero sin especificar la posición de los árboles. Estrictamente hablando esta clase de modelos debería incluir sólo aquellos basados en una lista de los árboles reales en una parcela, con sus dimensiones, como en Goulding (1972). Es común, sin embargo, incluir en esta categoría modelos donde el estado es una distribución de tamaños (generalmente una distribución diamétrica) especificada por una tabla de rodal (histograma) o por un número dado de cuantiles (Clutter y Allison 1974, Alder 1979), aunque puede discutirse que estas son descripciones a nivel de rodal. Dudek y Ek (1980) dan más referencias.

Estos modelos ocupan una posición intermedia entre los de nivel de rodal y los de posición en términos de detalle en la descripción de estado, costo computacional, y requerimientos de información. Este detalle es necesario para modelar rodales disetáneos. Con plantaciones forestales razonablemente homogéneas, sin embargo, el detalle adicional puede ser en su mayor parte redundante.

Una dificultad potencial con las distribuciones de tamaño surge de la correlación espacial de los tamaños de los árboles (García 1984b). Sobre distancias muy cortas generalmente hay una correlación negativa debida a la competencia. Sobre distancias mayores la similaridad de micrositio produce una correlación positiva, decreciente con la distancia. Esto implica que una distribución de tamaños debe variar con el área de terreno considerada. En particular, la varianza debe cambiar con el tamaño de la parcela, y es poco probable que distribuciones derivadas de parcelas de muestra sean válidas para rodales o cuarteles enteros. Curiosamente, estas consideraciones han sido generalmente ignoradas por los modeladores del crecimiento, aunque su importancia ha sido reconocida por largo tiempo en muestreo forestal. El significado práctico de estos efectos para la predicción del crecimiento es aún incierto. Hasta que esto se aclare, sin embargo, parece prudente usar distribuciones de tamaños de árboles con cierto cuidado.

Estimación

En la mayoría de los modelos de crecimiento los parámetros son estimados usando regresión lineal o no lineal. Algunas características de los datos de crecimiento pueden causar dificultades debidas a la violación de los supuestos estadísticos en que se basan las técnicas de regresión.

Un problema que se menciona a menudo es la correlación entre mediciones sucesivas en parcelas permanentes (Sullivan y Reynolds 1976, Ferguson y Leech 1978). Esta correlación surge porque el valor de una variable al tiempo de una medición incluye los valores en las mediciones anteriores. El efecto es más importante para el desarrollo de modelos estáticos. En modelos dinámicos las variables dependientes en las regresiones son generalmente incrementos periódicos, los que son más independientes que las mediciones en que se basan. Hay aún alguna correlación entre incrementos sucesivos debido principalmente a errores de medición en los puntos de medición que tienen en común, y entre incrementos para el mismo período en parcelas distintas debido a la acción de condiciones climáticas similares.

Otro problema es la naturaleza de multirespuesta de los modelos. Es decir, los modelos consisten frecuentemente de ecuaciones donde las variables independientes pueden estar correlacionadas, y donde parámetros en ecuaciones distintas pueden ser comunes o estar relacionados funcionalmente. En esta situación ajustar las ecuaciones una a la vez puede no ser satisfactorio, si es que es posible. Hunter (1967) discute el problema y algunas soluciones en el contexto de la cinética química. Burkhart (1985) revisa enfoques que han sido usados en modelos de crecimiento. Bates y Watts (1985) han escrito recientemente sobre estimación con multirespuesta.

Un tercer problema es la determinación, a partir de los datos, de incrementos o tasas de cambio de las variables de estado. Algunas veces las mediciones se han tomado uniformemente espaciadas en el tiempo. En ese caso el cálculo de los incrementos periódicos a ser usados como variables independientes es fácil. Frecuentemente, sin embargo, se dispone de mediciones tomadas a intervalos variables, y es necesario entonces usar aproximaciones. Esto tiende a ser más un problema con especies de crecimiento rápido, donde las diferencias de crecimiento surgidas de fechas de medición variables son mayores. Además, la variabilidad en incrementos debida a fluctuaciones climáticas de año a año tiende a ser mayor que en rodales de crecimiento lento donde los incrementos promedian estos efectos sobre varios años. Una dificultad relacionada está en las aproximaciones a veces necesarias al acumular incrementos sobre un intervalo de proyección que no es un múltiplo exacto del período de los incrementos.

Se han usado algunos métodos estadísticos de estimación no basados en regresión. En una serie de modelos para pino insigne en Nueva Zelanda (García 1979, 1984b, 1988), las ecuaciones diferenciales que definen la función de transición fueron extendidas con perturbaciones aleatorias para fines de estimación, convirtiéndolas en ecuaciones diferenciales estocásticas. Los problemas asociados a períodos variables de incremento se evitaron entonces usando directamente la forma integrada de las ecuaciones, tomando al mismo tiempo en cuenta la mayor parte de los efectos de correlación a través de la naturaleza estocástica del modelo. La multirespuesta fue abordada a través de estimación simultánea por máxima verosimilitud, con un procedimiento de optimización genérico.

Resumen

El punto de vista del espacio de estados puede clarificar los distintos enfoques en el modelado del crecimiento. En esta visión el comportamiento de un sistema que evoluciona en el tiempo se describe con un estado que caracteriza al sistema en cualquier punto en el tiempo, y una función de transición que especifica cómo cambia el estado a través del tiempo.

Se necesita un estado multidimensional para modelar adecuadamente el crecimiento de un rodal. Los modelos de crecimiento se clasifican comúnmente en tres tipos que difieren en el nivel de detalle de la descripción de estado. En los modelos a nivel de rodal el estado consiste en un pequeño número de variables resumen, por ejemplo área basimétrica, número de árboles y altura dominante. Los modelos de árbol individual dependientes de distancia incluyen en el estado el tamaño y posición de cada árbol en un trozo de terreno. Los modelos de árbol individual independientes de distancia usan una descripción de estado basada en una distribución de tamaños (generalmente diámetros).

El tipo de modelo más apropiado depende de las circunstancias. La homogeneidad de los rodales y la naturaleza de los tratamientos a ser analizados determina cuán detallada necesita ser la descripción del estado. Además, la descripción de estado determina también la cantidad y calidad de los datos de inventario necesarios para hacer proyecciones.

El desarrollo de modelos de crecimiento presenta problemas estadísticos peculiares. Una metodología que usa ecuaciones diferenciales estocásticas y estimación por máxima verosimilitud ha sido desarrollada y usada con éxito en Nueva Zelanda.

Referencias

Alder, D. (1979). A distance-independent tree model for exotic conifer plantations in East Africa. *Forest Science*, *25*, 59–71.

Alder, D. (1980). Forest Volume Estimation and Yield Prediction. Vol. 2 — Yield Prediction. Fao forestry paper 22/2, Rome.

Bates, D. M. y Watts, D. G. (1985). Multiresponse estimation with special application to linear systems of differential equations (with Discussion). *Technometrics*, *27*, 329–360.

Beekhuis, J. (1966). Prediction of Yield and Increment in *Pinus radiata* Stands in New Zealand. Technical Paper 49, Forest Research Institute, NZ Forest Service.

Burkhart, H. E. (1985). New Developments in Growth and Yield Prediction. In *Southern Forestry Symposium* Atlanta, Georgia.

CAB (1977). Computerized methods in forest planning and forecasting. Annotated bibliography F14, Commonwealth Agricultural Bureau, UK.

Clutter, J. L. y Allison, B. J. (1974). A Growth and Yield Model for *Pinus radiata* in New Zealand. In Fries, J. (Ed.), *Growth Models for Tree and Stand Simulation*, p. 136–160. Royal Coll. For., Stockholm. Research Notes 30.

Dudek, A. y Ek, A. R. (1980). A bibliography of worldwide literature on individual tree based forest stand growth models. Staff paper series 12, Dept.of Forest Resources, U. of Minnesota.

Ferguson, I. S. y Leech, J. W. (1978). Generalized least squares estimation of yield functions. *Forest Science*, *24*, 27–42.

García, O. (1979). Modelling stand development with stochastic differential equations. In Elliott, D. E. (Ed.), *Mensuration Systems for Forest Management Planning*, p. 315–334 Forest Research Institute Symposium No. 20. New Zealand Forest Service.

García, O. (1984a). FOLPI, a forestry-oriented Linear Programming interpreter. In Nagumo, H. et al. (Eds.), *Proceedings IUFRO Symposium on Forest Management Planning and Managerial Economics*, p. 293–305. University of Tokyo.

García, O. (1984b). New class of growth models for even-aged stands: *Pinus radiata* in Golden Downs Forest. *New Zealand Journal of Forestry Science*, *14*, 65–88.

García, O. (1988). Experience with an advanced growth modelling methodology. In Ek, A. R., Shifley, S. R., y Burk, T. E. (Eds.), *Forest Growth Modelling and Prediction*, p. 668–675. USDA Forest Service, General Technical Report NC-120.

Goulding, C. J. (1972). *Simulation techniques for a stochastic model of the growth of Douglas-fir*. Ph.D. thesis, University of British Columbia.

Goulding, C. J. (1986). Growth and Yield Models. In Levak, H. (Ed.), *1986 Forestry Handbook*, p. 97–99. New Zealand Institute of Foresters (Inc.), Wellington.

Hunter, W. G. (1967). Estimation of Unknown Constants from Multiresponse Data. *Industrial & Engineering Chemistry. Fundamentals*, *6*, 461–463.

Johnston, D. R. y Bradley, R. T. (1963). Forest management tables. *Commonwealth Forestry Review*, *42*, 217–227.

Lewis, N. B., Keeves, A., y Leech, J. W. (1976). . Yield regulation in South Australian *Pinus radiata* plantations. Bulletin 23, Woods and Forests Department, South Australia.

Mitchell, K. J. (1975). Dynamics and simulated yield of Douglas-fir. Forest science monograph 17.

Newnham, R. M. (1964). *The development of a stand model for Douglas fir*. Ph.D. thesis, University of British Columbia.

Newnham, R. M. (1968). Simulation models in forest management and harvesting. *The Forestry Chronicle*, *44*, 7–13.

Sullivan, A. D. y Reynolds, M. R. (1976). Regression problems from repeated measurements. *Forest Science*, *22*, 382–385.

Tennent, R. B. (1982). Individual-tree growth model for *Pinus radiata*. *New Zealand Journal of Forestry Science*, *12*, 62–70.

van Laar, A. (1969). Influence of tree parameters and stand density on diameter growth of *Pinus radiata*. *South African Forestry Journal*, *No. 70*, 5–14.