Informe Técnico Nº 48

SOBRE MODELOS MATEMATICOS DE RODAL

INSTITUTO FORESTAL

INFORME TECNICO Nº 48

SOBRE MODELOS MATEMATICOS DE RODAL

OSCAR GARCIA VIDAL
Sección Manejo .
División Forestal

INSTITUTO FORESTAL
1 9 7 4

(C) INSTITUTO FORESTAL
Inscripción No. 42.824, 1974

INSTITUTO FORESTAL
Valenzuela Llanos 1061 - Casilla 3085
Santiago, Chile

INDICE

Resumen 5
Summary 5
Modelos 7
Sistemas Dinámicos 8
Estado 8
Procesos 9
Ejemplos de Modelos de Rodal 11
Ejemplo 1 11
Ejemplo 2 12
Ejemplo 3 14
Ejemplo 4 15
Ejemplo 5 17
Discusión 19
Anexo 21
Bibliografía 27

R E S U M E N

Se exponen algunos conceptos que pueden ser de utilidad en el estudio de los rodales forestales a través de modelos matemáticos. Se incluye una serie de ejemplos que ilustran estas ideas.

Concretamente se describe la aplicación a la formulación de modelos de rodal de un esquema basado en el concepto de sistema dinámico o proceso de etapas múltiples, utilizado especialmente por la Teoría del Control. Este implica la especificación de un vector de estado que describe el sistema en un momento determinado, y de una función de transición que determina los cambios de estado. Se hace notar además la necesidad de vectores de estado multidimensionales.

S U M M A R Y

Some concepts that may be useful for the study of forest stands through mathematical models are disscused. A set of examples to illustrate these ideas is included.

Application to stand models formulation of an approach based on the concept of dynamic system or multistage process, used specially by Control Theory, is described. This approach involves the specification of a state vector which describes the system at a given time, and the specification of a transition function which determines the changes of state. Furthermore the need for multidimensional state vectors is pointed out.

El propósito de este trabajo es exponer algunos conceptos que pueden ser de utilidad en el estudio de los rodales forestales * a través de modelos matemáticos, ilustrándolos con una serie de ejemplos.

Este informe es una ampliación de algunas ideas presentadas anteriormente (García, 1968), y se basa en una charla ofrecida en la Universidad Austral en Enero de 1972.

M O D E L O S

Un sistema es, en líneas generales, un conjunto de componentes y un conjunto de relaciones entre los componentes. Cuando podemos actuar sobre un sistema afectando su comportamiento, se nos presenta el problema de elegir nuestra acción convenientemente. Para elegir nuestra acción convenientemente necesitamos previamente conocer, al menos aproximadamente:

a) La relación entre nuestra conveniencia y el comportamiento del sistema.

b) La relación entre el comportamiento del sistema y nuestras acciones.

Nos referiremos solamente al segundo punto, es decir, a la predicción del comportamiento de un sistema.

El comportamiento de un sistema podría determinarse directamente, experimentando las distintas alternativas de acción y registrando los resultados. Sin embargo, en muchos casos, aparte de que el número de alternativas puede ser infinito, la experimentación directa puede ser lenta, costosa o incluso imposible por diversas razones. Por ejemplo, si el sistema es un rodal forestal en el cual interesa conocer su comportamiento frente a distintos programas de raleos, aun suponiendo que el número de programas de interés fuera finito, la experimentación es costosa y requiere tiempo. En el caso de un sistema económico o social la experimentación es claramente impracticable.

Se puede recurrir entonces al uso de modelos. Un modelo de un sistema es otro sistema tal que, habiendo establecido una correspondencia entre aspectos de ambos sistemas, se comporta de manera parecida al sistema original. Se puede entonces experimentar en el modelo (a menor costo) y obtener así información sobre el comportamiento del sistema que nos interesa.

Los modelos pueden ser de distintos tipos (ver por ejemplo Ackoff y Sasieni, 1968; Churchman, Ackoff y Arnoff, 1957). Un ejemplo es un modelo a escala de un avión que se prueba en un túnel de viento. O un tablero con fichas donde se simulan operaciones militares. O un circuito eléctrico que representa el sistema de suspensión de un automóvil (existe una analogía muy estrecha entre sistemas eléctricos y sistemas mecánicos, con correspondencias entre potencial eléctrico y fuerza, intensidad de corriente y velocidad, resistencia eléctrica y roce, inductancia e inercia, condensadores y resortes, etc.)

En los modelos matemáticos, el sistema se representa por un conjunto de símbolos ligados por relaciones matemáticas. Este tipo de modelos ha ido adquiriendo cada vez más importancia con el uso de los computadores digitales, ya que éstos hacen posible la operación de modelos complejos a bajo costo. Es a éste tipo de modelos al que nos referiremos. Con un modelo matemático, dependiendo de su naturaleza y complejidad, las alternativas más convenientes pueden buscarse experimentalmente (simulación) o determinarse matemáticamente (optimización).

* Un rodal forestal es una extensión de bosque de características relativamente homogéneas.

Es importante señalar que a un sistema no le corresponde un modelo matemático único, sino que se pueden construir modelos de distinta naturaleza matemática y con diversos grados de afinamiento. Las características de un modelo deben depender, entre otras cosas, de la finalidad para la cual se construye, de los conocimientos que se tengan sobre el sistema, de las posibilidades de estimar los parámetros necesarios, del instrumental matemático disponible, de las facilidades de computación, etc.

En particular, un sistema puede considerarse como compuesto por subsistemas interrelacionados y, a su vez, estos subsistemas constituidos por otros subsistemas, etc. En esta forma, el problema de construir un modelo puede descomponerse en varios subproblemas que pueden abordarse separadamente e incluso por distintos equipos de personas. Es así como, por ejemplo, para desarrollar un modelo del Sector Forestal se podrían considerar como subsistemas el sector silvícola, la industria forestal y el sistema de distribución y transporte. Dentro del sector silvícola considerar unidades de producción (empresas) y, dentro de las unidades de producción, entre otros subsistemas, los rodales. También pueden considerarse los árboles como subsistemas que componen un rodal, etc. Como ya se dijo, el grado de división en subsistemas es un asunto de conveniencia que depende, entre otras cosas, del conocimiento del sistema y del grado de afinamiento que se persiga.

En el planeamiento del manejo de los recursos forestales, probablemente la dificultad mayor en este momento está en predecir el comportamiento de un rodal frente a las intervenciones silvícolas. Es decir, el problema está en desarrollar modelos matemáticos adecuados para los rodales.

S I S T E M A S D I N A M I C O S

Estado

Estamos interesados en el comportamiento de un sistema a través del tiempo.

En cualquier momento t, el sistema está caracterizado por su estado, representado por un vector de estado p_t. Este vector de estado es un punto en un conjunto o espacio S, tal que describe adecuadamente para nuestros propósitos el estado del sistema. "Adecuadamente" significa que si dos sistemas tienen el mismo vector de estado en un momento dado, podemos considerarlos como equivalentes, comportándose en la misma forma (para una discusión más rigurosa del concepto de estado véase: Wiberg, 1971; Zadeh, 1964). El vector de estado puede ser un número real, un vector de dimensión finita, una sucesión infinita de números reales, una función o cualquier otro ente matemático conveniente.

Por ejemplo, un rodal coetáneo podría caracterizarse por su volumen cúbico por hectárea y su edad (vector de dimensión dos). Esto es lo que más se ha usado en modelos de rendimiento.

En general, la edad en sí misma no parece ser importante como variable de estado. Al incluirla en realidad lo que se está haciendo es considerar otras variables que dependen de la edad y que tienen una relación causal más directa con el desarrollo del rodal. En especial, la altura dominante (altura media de los árboles dominantes o dominantes y codominantes) tiene una relación muy estrecha con la edad en un sitio dado, de modo que otro vector de estado casi equivalente al anterior podría ser el formado por el volumen y la altura dominante.

El uso de estos vectores de estado significaría que estamos aceptando que, en un sitio dado, dos rodales que tienen igual volumen y edad, o igual volumen y altura, se comportarán de la misma manera. Sin embargo, parece obvio que si, a pesar de coincidir en estos vectores de estado, los rodales difieren marcadamente en el número de árboles por hectárea, sus crecimientos pueden ser muy diferentes.

Podríamos entonces considerar como variables de estado el volumen, altura dominante y número de árboles por hectárea. Parece ser que para describir aceptablemente el estado de un rodal coetáneo son necesarias por lo menos tres variables, que podrían ser las indicadas u otras relacionadas con estás, como por ejemplo, área basal, diámetro medio y altura. Podrían agregarse otras variables, como medidas de dispersión (varianzas) que indiquen la homogeneidad del rodal, medidas de forma del fuste, etc.

Otro vector de estado usado en las proyecciones por el método Reynolds, es el número de árboles por hectárea por clases de DAP*. Este es un ejemplo de vector de dimensión infinita (sucesión de números reales), aunque puede reducirse a un vector de dimensión finita limitando el número de clases de DAP.

Si se considera el número de árboles por hectárea por clases de DAP y de altura, con un número finito de clases, se tiene que el vector de estado es una matriz (que se puede representar también de otras maneras).

El caso de la distribución diamétrica es un ejemplo en que el vector de estado es una función (vector de dimensión infinita no numerable).

Al considerar un árbol, su estado puede describirse por su DAP y altura (vector de dimensión 2), por su DAP, altura y coeficiente de forma (vector de dimensión 3), por su diámetro en función de la altura (función), etc.

Queda claro entonces que podemos tomar como S cualquier conjunto conveniente.

Procesos

El comportamiento del sistema en un lapso de tiempo T quedaría completamente caracterizado por el conjunto de estados $\{p(t) : t \epsilon T\}$ Este conjunto o sucesión (numerable o no) de estados constituye un proceso. Puede imaginarse el proceso como un punto que se mueve en el espacio de estados S. Esta visualización es particularmente fácil cuando el vector de estado es de dimensión dos o tres, pudiéndose entonces representar S en un plano o en un espacio tridimensional, respectivamente.

Los procesos pueden ser determinísticos o estocásticos. Un proceso es determinístico si el conocimiento de un estado inicial y de las acciones posteriores sobre el sistema determina completamente su comportamiento futuro. Los procesos estocásticos se caracterizan por contener elementos aleatorios que hacen que sólo pueda determinarse una distribución de probabilidad para los estados futuros (véase p. ej.: Cox y Miller, 1965; Barttlet, 1966). En particular, los procesos estocásticos en los que el comportamiento futuro depende de un estado inicial y de las acciones posteriores sobre el sistema y no de su historia anterior, se denominan procesos de Markov, siendo los más interesantes como modelos estocásticos de rodal. Aquí trataremos solamente de modelos determinísticos.

Consideremos primeramente el caso en el cual nos interesan solamente los estados en ciertos instantes uniformemente espaciados en el tiempo. Para simplificar supongamos además que el espaciamiento es de una unidad de tiempo, partiendo del instante cero. Siempre puede formularse así el problema usando un cambio de escala adecuado. En este caso T es el conjunto $\{0,1,2,3,\ldots\ldots\}$. La evolución del sistema estará dada entonces por la sucesión $\{p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\}$.

* Diámetro a la altura del pecho (1,3 m sobre el suelo).

Ya que el comportamiento del sistema depende únicamente de su estado y de nuestra acción sobre el sistema, el cambio de estado entre los instantes t y t + 1 se puede representar por una transformación (función de transición).

$$p_{t+1} = T(p_t, q_t),$$

donde q_t es un vector que describe nuestra acción sobre el sistema en el momento t, y que llamaremos vector de control (Bellman, 1956; Bellman y Kalaba, 1965). En otras palabras, el estado al tiempo t + 1 es una función T del estado al tiempo t y del vector de control al tiempo t.

Puede observarse que la evolución del sistema queda completamente especificada dando el estado inicial p_0, la función T y el programa de control $\{q_t : t = 0,1,2,\ldots\ldots\}$. En efecto, el estado al tiempo n puede calcularse aplicando n veces la función T :

$$\begin{aligned} p_1 &= T(p_0, q_0) \\ p_2 &= T(p_1, p_1) \\ &\vdots \\ p_n &= T(p_{n-1}, q_{n-1}), \end{aligned}$$

o sea:

$$p_n = T(T(\ldots T(T(T(p_0, q_0), q_1), q_2) \ldots, q_{n-1}), q_n).$$

En el caso de los modelos de rodal, nuestras acciones son generalmente intervenciones silvícolas (cortas parciales) que equivalen a cambios de estado que podemos considerar como instantáneos. Para simplificar el problema, podemos considerar entonces únicamente la evolución del rodal entre dos intervenciones sucesivas, prescindiendo del vector de control. Nuestra función de transición será entonces simplemente

$$p_{t+1} = T(p_t) \tag{1}$$

Esta ecuación puede escribirse también, restando p_t en cada miembro:

$$p_{t+1} - p_t = T(p_t) - p_t \quad ,$$

o bien:

$$\triangle p = f(p) \tag{2}$$

Cualquiera de las dos formas, (1) o (2), es adecuada para un modelo matemático de rodal.

Pasemos ahora al caso continuo. A veces interesa considerar el proceso como continuo en el tiempo, o sea, $\{ p(t) \}$ con t variando continuamente en un intervalo. T sería el intervalo $[0,\infty)$.

Sí, como en el caso descrito, consideramos puntos separados a intervalos $\triangle t$ en el tiempo, el estado al tiempo $t + \triangle t$ será una función del estado al tiempo t. Esta función depende también del tamaño de los intervalos considerados:

$$p(t + \triangle t) = T[p(t), \triangle t].$$

La función T puede desarrollarse en serie de Taylor alrededor de t, dando una expresión de la forma

$$p(t + \triangle t) = p(t) + f[p(t)]\triangle t + o(\triangle t),$$

donde $o(\triangle t)$ denota los términos de orden menor que $\triangle t$, o sea, tales que

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{o(\triangle t)}{\triangle t} = 0.$$

Se tiene entonces

$$\frac{p\,(t+\Delta t)-p\,(t)}{\Delta t} = f\,[p\,(t)] + \frac{o\,(\Delta t)}{\Delta t}$$

Si consideramos intervalos Δt cada vez más pequeños, cuando Δt tiende a cero, en el límite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p\,(t+\Delta t)-p\,(t)}{\Delta t} = \frac{d\,p\,(t)}{dt} = f\,[p\,(t)\,],$$

o sea:

$$\frac{dp}{dt} = f\,(p), \qquad (3)$$

que es análogo a (2).

EJEMPLOS DE MODELOS DE RODAL

Ejemplo 1

Supongamos que nos interesa solamente el desarrollo en la altura dominante de un rodal coetáneo. Tomemos como vector de estado la altura dominante H. Entonces $S = \mathbf{R}$, el conjunto de los números reales. El desarrollo en altura dominante se considera usualmente independiente del manejo y, por lo tanto, de otras características del rodal distintas de la altura, de modo que es un vector de estado adecuado.

Consideremos un modelo en tiempo discreto con intervalos de un año. De acuerdo con (1), la altura al año t + 1 depende de la altura al año t:

$$H_{t+1} = T\,(H_t).$$

Supongamos que la función T es lineal

$$H_{t+1} = a + b\,H_t.$$

Esta ecuación, junto con la altura inicial H_0, determina completamente el desarrollo en altura (para una discusión de este tipo de ecuaciones véase Goldberg, 1964):

$$H_1 = a + b\,H_0$$

$$H_2 = a + ab + b^2\,H_0$$

$$H_3 = a + ab + ab^2 + b^3 H_0$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$H_n = a \sum_{k=0}^{n-1} b^k + b^n H_0,$$

de donde:

$$H_n = \frac{a\,(1-b^n)}{1-b} + b^n\,H_0,$$

$$H_n = \frac{a}{1-b} - \left(\frac{a}{1-b} - H_0\right) b^n \qquad (4)$$

También podría presentarse el modelo en la forma $\triangle H = f(H)$:

$$\triangle H = H_{t+1} - H_t = a + (b-1) H_t,$$

o sea:

$$\triangle H = a - cH, \text{ con } c = 1 - b.$$

Consideremos ahora un modelo continuo de este mismo tipo. Según (3):

$$\frac{dH}{dt} = f(H).$$

Supongamos que f es lineal:

$$\frac{dH}{dt} = \alpha + \beta H$$

Esta ecuación, junto con la altura inicial (o la altura H_0 en un momento dado t_0), también determina el desarrollo en altura:

$$\frac{dH}{\alpha - \beta H} = dt$$

$$\int_{H_0}^{H} \frac{dH}{\alpha - \beta H} = \int_{t_0}^{t} dt$$

$$-\frac{1}{\beta} [\ln(\alpha - \beta H) - \ln(\alpha - \beta H_0)] = t - t_0$$

$$\frac{\alpha - \beta H}{\alpha - \beta H_0} = e^{-\beta(t - t_0)}$$

$$H = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} - H_0\right) e^{-\beta(t - t_0)}.$$

Se ve que esta expresión es del mismo tipo que (4) y coincide con ella tomando

$$b = e^{-\beta} \text{ y } \frac{a}{1-b} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ejemplo 2

En un rodal coetáneo, tomemos como vector de estado el trío $X = (B,D,H)$, formado por el área basal, diámetro medio y altura dominante. Aquí $S = R^3$. Consideremos los incrementos anuales

$$\triangle X = f(X),$$

o bien, escrito de otra manera:

$$\triangle B = f_1(B,D,H)$$
$$\triangle D = f_2(B,D,H)$$
$$\triangle H = f_3(B,D,H).$$

Supongamos que las ecuaciones son de la siguiente forma:

$$\triangle B = a_{11}B + a_{12}D + a_{13}H + b_1$$

$$\triangle D = a_{21}B + a_{22}D + a_{23}H + b_2$$
$$\triangle H = \qquad\qquad\qquad a_{33}H + b_3.$$

Considerando a X como un vector columna, éste sistema de ecuaciones en diferencias puede abreviarse usando notación matricial:

$$\triangle X = A\,X + \underline{b},$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \text{ y } \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Se puede resolver esta ecuación para obtener el estado después de n años a partir de un estado inicial X_0. Para ésto hagamos la sustitución

$$X = Y - A^{-1}\,\underline{b} \quad .$$

Entonces

$$\triangle Y = AY, \text{ o bien, } Y_{t+1} = (A + I)\,Y_t.$$

Aplicando repetidamente esta relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} Y_1 &= (A + I)\,Y_0 \\ Y_2 &= (A + I)^2\,Y_0 \\ &\;\;\vdots \\ Y_n &= (A + I)^n\,Y_0 \;. \end{aligned}$$

Volviendo a la variable original se tiene:

$$X_n = (A + I)^n\,(X_0 + A^{-1}\,\underline{b}) - A^{-1}\,\underline{b} \quad .$$

También se puede plantear una versión continua de este mismo modelo:

$$\frac{dX}{dt} = AX + \underline{b}\,, \quad X(t_0) = X_0 \quad .$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales se puede integrar, obteniéndose una fórmula para X en función del tiempo, a partir de cualquier estado inicial X_0. La solución es análoga a la del modelo discreto, coincidiendo con ella para valores enteros de t.

Es claro que todo lo anterior se aplica directamente a vectores de cualquier dimensión finita.

En el Instituto Forestal se está trabajando en un modelo de este tipo para pino insigne. Se buscará un vector de estado conveniente y se estimarán A y $\underline{b}$ usando datos de parcelas experimentales de raleos.

Ejemplo 3

Consideremos un rodal coetáneo descrito por el vector de estado (V,N,H), donde V es el volumen cúbico por hectárea, N es el número de árboles por hectárea y H es la altura dominante. Sea M el peso seco total por hectárea del rodal.

El incremento anual bruto en peso seco del rodal es igual a la asimilación fotosintética menos las pérdidas por respiración:

$\triangle M$ = asimilación − respiración

Hagamos los siguientes supuestos:

(i) El incremento bruto en volumen de los fustes es proporcional al incremento bruto en peso seco: $\triangle V \propto \triangle M$

(ii) La densidad se mantiene siempre lo suficientemente alta como para que haya un aprovechamiento total del sitio. Entonces la asimilación por unidad de superficie es constante.

(iii) La respiración puede suponerse proporcional a la cantidad de tejidos vivos y ésta proporcional a la superficie de los fustes. La superficie de los fustes es proporcional al producto del diámetro medio por la altura y el número de árboles.

Entonces:

$$\triangle V = a - b\,N\,H\,D.$$

Tenemos que reemplazar D en función de N,H y V. Supongamos un factor de forma constante, o sea, $V = f\,BH$. Además, $B = \frac{\pi}{4} N D^2$.

Eliminando B entre estas dos fórmulas y despejando D obtenemos

$$D = \sqrt{\frac{4}{\pi f}} \cdot \sqrt{\frac{V}{NH}} ,$$

Reemplazando en la fórmula para el incremento bruto en volumen se tiene finalmente

$$\triangle V = a - b' \sqrt{VNH}$$

Si suponemos que los raleos son suficientemente frecuentes e intensos, de modo que la mortalidad natural sea despreciable, entonces $\triangle N = 0$ y el incremento neto del volumen es igual al incremento bruto.

Suponiendo un incremento lineal para la altura, como en el ejemplo 1, se tiene el modelo completo:

$$\triangle V = a - b' \sqrt{VNH}$$

$$\triangle N = 0$$

$$\triangle H = c - dH .$$

Al contrario que en el ejemplo anterior, este sistema de ecuaciones no lineales aparentemente no puede integrarse analíticamente. Una versión continua de este modelo fue formulada por García (1968) y usada para simular el efecto de distintos programas de raleos usando un computador analógico. Una versión modificada, incluyendo mortalidad natural, ha sido programada para trabajar en forma conversacional en el Sistema APL/360. En el Anexo se presenta un ejemplo de su funcionamiento.

Ejemplo 4

Examinemos el método de proyección de Reynolds a través de los conceptos que hemos planteado aquí.

Como estado se toma el número de árboles por hectárea por clase de DAP. Este puede representarse por una sucesión infinita de números reales $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\}$, donde x_i es el número de árboles por hectárea en la clase i. También podemos limitarnos a un número finito de clases de DAP, suficientemente grande, teniendo entonces un vector de estado de dimensión finita.

Veamos como se obtiene la función de transición. El razonamiento se describe gráficamente en la figura 1. En ella se representa primeramente una distribución de los árboles por clases de DAP para las clases i − 1, i , i + 1, en el año t.

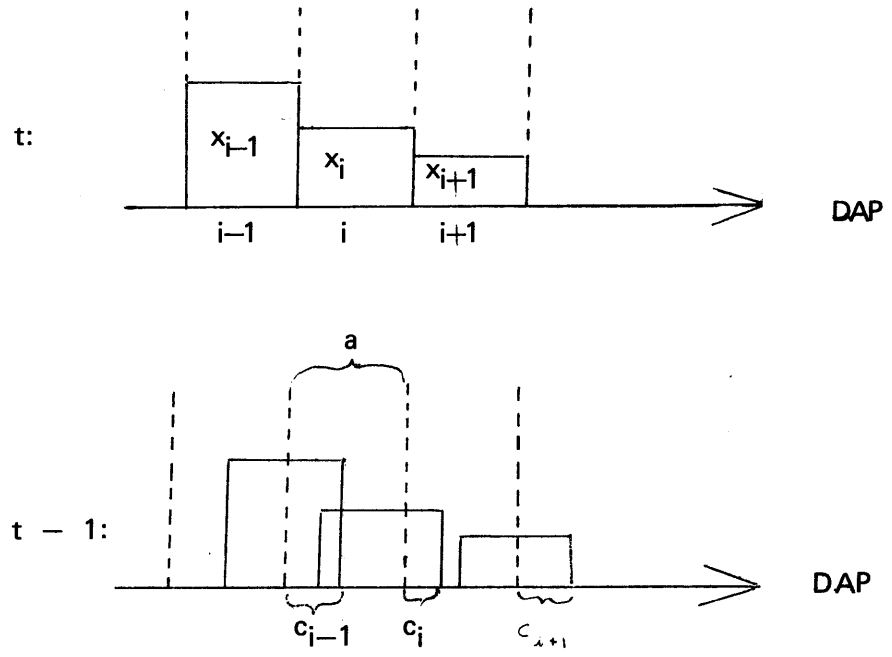


FIGURA 1

En la segunda parte de la figura se observan los números de árboles al año siguiente, que se han desplazado en cantidades iguales a los crecimientos diametrales anuales $\{c_i\}$. Si el ancho de las clases de DAP es a, se ve que el número de árboles en la clase i al año t + 1 es

$$x_{i,t+1} = x_{it} - \frac{c_i x_{it}}{a} + \frac{c_{i-1} x_{i-1,t}}{a}$$

Luego, haciendo $c_i / a = b_i$, la función de transición está dada por las ecuaciones

$$x_{i,t+1} = b_{i-1}\, x_{i-1,t} + (1 - b_i)\, x_{it}\ ;\ i = 1, 2, 3, \ldots\ldots \qquad (5)$$

o bien

$$\Delta x_i = b_{i-1}\, x_{i-1} - b_i x_i\ ;\ i = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Convenimos que las variables x_{0t} representan la regeneración que entra a la primera clase de DAP el año $t + 1$, y que $b_0 = 1$.

Las ecuaciones (5) pueden también representarse en forma matricial usando la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 - b_1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ b_1 & 1 - b_2 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 1 - b_3 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 1 - b_4 \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & b_{n-1} & 1 - b_n \end{bmatrix},$$

y obtener expresiones para el estado a partir de un estado inicial, tal como en el ejemplo 2. Esta notación podría usarse para estudios teóricos, pero computacionalmente es más eficiente trabajar directamente con las ecuaciones (5).

También puede formularse una versión continua de este modelo. Sea z el DAP, c(z) la tasa de crecimiento diametral, y(z,t) la densidad de árboles según diámetro en el instante t (límite de x_i/a cuando a tiende a cero), $y_0(z)$ la densidad inicial, t_0 el instante inicial y r(t) la tasa de aparición de regeneración al instante t. Entonces se llega, usando el mismo argumento de la figura 1, desarrollo en serie y paso al límite, a la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial c(z) y}{\partial z} = 0,$$

con las condiciones de contorno

$$y\ (z, t_0) = y_0\ (z)$$

$$y\ (0,t) = r\ \ (t).$$

La solución es:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{c(z)}\, c\,[F^{-1}(F(z) - t + t_0)]\, y_0\,[F^{-1}(F(z) - t + t_0)], \text{ para } F(z) \gtrsim t - t_0 \\[2ex] \dfrac{c(0)}{c(z)}\, r\,[t - F(z)], \text{ para } F(z) \lesssim t - t_0, \end{cases}$$

donde

$$F(z) = \int_0^z \frac{dx}{c(x)} \quad .$$

Conviene hacer notar que este modelo contiene dos supuestos poco satisfactorios. En primer lugar, supone que el comportamiento del rodal depende sólo de los diámetros de los árboles. Podría describirse mejor el sistema agregando además en el vector de estado las alturas y, en el caso de los bosques mixtos, las especies. El otro supuesto es que la tasa de crecimiento en diámetro de cada árbol depende sólo de su diámetro. Es claro que el crecimiento de un árbol depende del tamaño y número de sus vecinos, de modo que la tasa de crecimiento debe ser una función más complicada del vector de estado.

Ejemplo 5

Examinaremos brevemente la estructura de un tipo de modelo que se ha usado para simular el desarrollo de una porción pequeña de un rodal, a través del desarrollo de árboles individuales, Para concretar, tomaremos como ejemplo un modelo propuesto por Newnham (1964, 1968 a, 1968 b) para rodales coetáneos.

En el modelo de Newnham el estado de la porción de rodal (parcela) cuyo desarrollo se va a simular se caracteriza, en un momento dado, por la edad del rodal y por el DAP y posición de cada árbol en la parcela. Este estado se proyecta, usando períodos de 5 años, a través de los cambios en el DAP de cada árbol. El incremento periódico en DAP de un árbol se supone una función lineal de su DAP, de la edad y de un "índice de competencia" que analizaremos luego. Si este incremento resulta ser menor que cierta cantidad se supone que el árbol muere.

El índice de competencia intenta reflejar el efecto del tamaño y cercanía de los árboles vecinos sobre el crecimiento de un árbol. El usado por Newnham se basa en un círculo de competencia dentro del cual el árbol competiría por los factores de sitio, y que se supone equivalente a la proyección de la copa de un árbol del mismo tamaño creciendo en terreno abierto. Experimentalmente se ha determinado que tal diámetro de copa es una función aproximadamente lineal del DAP. El índice de competencia para un árbol determinado se define según los traslapos de los círculos de competencia en la forma descrita en la figura 2 (para otros índices de competencia véase: Opie, 1968; Mitchell, 1969; Van Laar, 1969).

$$\text{Indice competencia} = \sum_{i=1}^{5} \theta_i / 2\pi$$

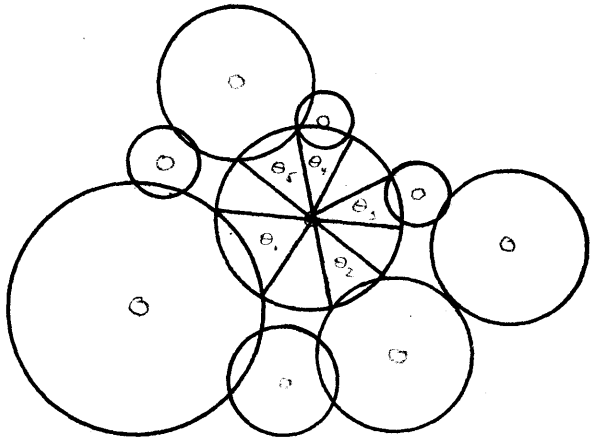


FIGURA 2

Para pasar de un estado de la parcela a su estado en el período siguiente, el procedimiento consiste en calcular para cada árbol su índice de competencia y, con éste, su incremento diametral.

Este tipo de modelos puede interpretarse de distintas maneras haciendo uso de los conceptos discutidos aquí. La forma más directa es considerar un solo sistema: la parcela completa. Entonces el vector de estado está compuesto por las posiciones de todos los árboles (especificadas por ej. con coordenadas rectangulares), una o más variables de estado para cada árbol y, opcionalmente, una o más variables de estado globales para el rodal. En el modelo que hemos descrito, las variables de estado para cada árbol serían su DAP y su edad, si es que la edad se considera como edad de cada árbol. La edad puede considerarse alternativamente como una variable global para el rodal. Si en lugar de la edad usáramos la altura dominante, ésta sería necesariamente una variable global. La función de transición sería el procedimiento que permite pasar de un estado al estado en el período siguiente. Cabe hacer notar que la función de transición no necesita tener una expresión analítica cerrada, a través de una fórmula, sino que es cualquier procedimiento que determine unívocamente un estado a partir del estado anterior (y del vector de control correspondiente, si éste existe). En éste caso la función de transición es un algoritmo más o menos complicado, programado para su ejecución en un computador.

Otra forma de interpretar estos modelos es considerar la parcela como un sistema y los árboles como subsistemas. Cada subsistema está caracterizado por su vector de estado (DAP y edad en el modelo de Newnham) y por su función de transición.

La función de transición de un subsistema determina su cambio de estado en función de su estado y de un vector de control que depende del estado de los demás subsistemas (p. ej. un índice de competencia). El estado y los cambios de estado del sistema (parcela) quedan determinados entonces por los estados y cambios de estado de todos los subsistemas que lo componen.

DISCUSION

La idea principal que se ha tratado de exponer aquí es la aplicación a la formulación de modelos de rodal de un esquema basado en el concepto de sistema dinámico, utilizado especialmente por la Teoría del Control. De acuerdo a este esquema, la formulación de un modelo comprende dos partes: la especificación de un vector de estado, que describe al sistema en un momento determinado, y la especificación de una función de transición, que describe los cambios de estado. Aunque muchos autores han planteado modelos de rodal que concuerdan con ésto, el establecer explícitamente este marco conceptual puede contribuír a clarificar y guiar el estudio de los rodales forestales. Cabe hacer notar que estos conceptos de estado y función de transición son válidos no sólo para modelos de rodal, sino que también para muchos otros sistemas en los cuales el tiempo cumple un rol fundamental.

Otro aspecto importante es la necesidad, en la gran mayoría de los casos, de usar vectores de estado multidimensionales para describir adecuadamente un rodal. Así, en el caso de un rodal coetáneo vimos que son necesarias por lo menos tres variables de estado para una descripción satisfactoria. Otras variables de interés, como distintos tipos de volúmenes, valores monetarios, etc., pueden calcularse como funciones de las variables de estado, si es necesario a través de ecuaciones de regresión. Esto contrasta con gran parte del trabajo realizado sobre tablas de rendimiento, donde se ha usado como única variable de estado el volumen por hectárea, agregando en algunos casos un índice de densidad. El sistema de las tablas de rendimiento es insatisfactorio para predecir el desarrollo de rodales manéjados, sobre todo con especies de crecimiento rápido, por dos razones: uso de vectores de estado inadecuados, e intento de determinar directamente la relación estado–edad en lugar de usar funciones de transición.

Se pueden usar modelos en tiempo discreto o en tiempo continuo. Los modelos discretos son más adecuados para trabajar en computadores digitales y generalmente son más fáciles de comprender para las personas con menos entrenamiento matemático. Los modelos continuos son convenientes para la simulación en computadores analógicos y, en algunos casos, se pueden prestar más para el estudio matemático del sistema. Los modelos de rodal pueden usarse como guía para el manejo o en la investigación en silvicultura, explotación, mejoramiento genético, etc. (ver por ej.: Smith *et alii.*, 1965; Newnham, 1966; Sakai *et alii.*, 1968).

En las aplicaciones al manejo forestal, el modelo de rodal normalmente constituye un submodelo dentro de un modelo de un sistema más grande, el que puede contener otros rodales, proyecciones de precios, otros subsistemas, y la relación entre las variables de estado y un índice de eficiencia del sistema (García, 1968).

Se puede entonces intentar la determinación de los valores de las variables de control que maximizan el índice de eficiencia, usando técnicas de optimización adecuadas. Si ésto no es posible hay que recurrir a técnicas de simulación para llegar a una "buena" solución. Al formular un modelo de rodal con estos fines, es necesario entonces tener en cuenta las dificultades computacionales que pueda presentar.

Además de lo anterior, del tipo y complejidad del modelo dependen también las dificultades para determinar los parámetros que sea necesario estimar en base a datos experimentales. Debe tenerse presente también, que el vector de estado utilizado determina la información sobre el estado inicial del rodal necesaria para predecir su desarrollo. En consecuencia, en la formulación de un modelo de rodal con fines de manejo, debe llegarse a un compromiso entre el grado de afinamiento del modelo y la información requerida para su uso, las posibilidades de estimar los parámetros con la información disponible, y las facilidades de optimización.

Para el manejo de rodales coetáneos puros los más adecuados parecen ser modelos como los de los ejemplos 2 y 3. Lo ideal sería un modelo basado en consideraciones ecofisiológicas, tal como el del ejemplo 3. Para el modelo para pino insigne del Instituto Forestal, sin embargo, la falta de una expresión teórica adecuada para la mortalidad natural y dificultades de estimación de los parámetros debidas a deficiencias de los datos experimentales hacen preferible el uso de un modelo empírico similar al del ejemplo 2. La linealidad de ese modelo facilitará además su uso.

Para rodales multietáneos es necesario recurrir a modelos más detallados, análogos al del ejemplo 4 aunque más complejos. El desarrollo de modelos adecuados de éste tipo requiere aún de bastante investigación.

La investigación básica necesaria para el desarrollo de los modelos mencionados en el párrafo anterior, y para el perfeccionamiento de los otros modelos que se indicaron para rodales coetáneos, puede guiarse en parte a través del estudio de modelos aún más detallados, como los del ejemplo 5, aunque éstos no sean de aplicación directa al manejo forestal. Estos modelos a nivel de árboles individuales, que podríamos llamar modelos estructurales, pueden ser útiles, como ya se mencionó antes, en investigaciones en silvicultura, explotación, genética, patología, etc. El estudio de modelos estocásticos de éste tipo también puede ser útil.

A N E X O

EJEMPLO DE SIMULACION DEL DESARROLLO DE UN RODAL

OTA:
ha marcado con un asterisco en el
rgen la información e instrucciones
roducidas por el usuario.

SIMCOMC

SIM

SIM ES UNA FUNCION QUE DEMUESTRA LA SIMULACION DEL DESARROLLO DE UN RODAL DE PINO INSIGNE SOMETIDO A UN PLAN DE MANEJO CUALQUIERA, UTILIZANDO UN MODELO MATEMATICO DE UN TIPO PROPUESTO EN (1). OPERA EN FORMA CONVERSACIONAL.

EL MODELO USADO ES SIMILAR AL PRESENTADO EN EL APENDICE DE (1), CON LAS SIGUIENTES DIFERENCIAS: A.-SE MODIFICARON LAS ECUACIONES PARA USAR EL AREA BASAL, NUMERO DE ARBOLES Y ALTURA DOMINANTE COMO VARIABLES DE ESTADO. B.-SE USAN ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS EN LUGAR DE ECUACIONES DIFERENCIALES. C.-SE TOMA EN CUENTA LA MORTALIDAD NATURAL Y LA POSIBLE SUBUTILIZACION DEL ESPACIO DISPONIBLE. D.-LA TASA DE CRECIMIENTO EN ALTURA SE ESTIMA EN BASE A LA ECUACION DE INDICE DE SITIO, EN LUGAR DE SUPONERLA CONSTANTE. E.-SE SUPONEN RALEOS SELECTIVOS, INCLUYENDOSE LAS CORRECCIONES NECESARIAS. F.-SE INCLUYE EL CALCULO DE VOLUMENES CUBICOS, ASERRABLES Y PULPABLES.

ESTE MODELO TIENE SOLAMENTE EL CARACTER DE DEMOSTRATIVO YA QUE SUS PARAMETROS NO SE HAN AJUSTADO EN BASE A DATOS EXPERIMENTALES.

---

(1) GARCIA V.,O.: 'PROBLEMAS Y MODELOS EN EL MANEJO DE LAS PLANTACIONES FORESTALES'.ESC. DE INGENIERIA FORESTAL,U.DE CHILE (TESIS).1968.

REQUIERE TAB, PLOT, VS.

O.G,V. 11/12/69

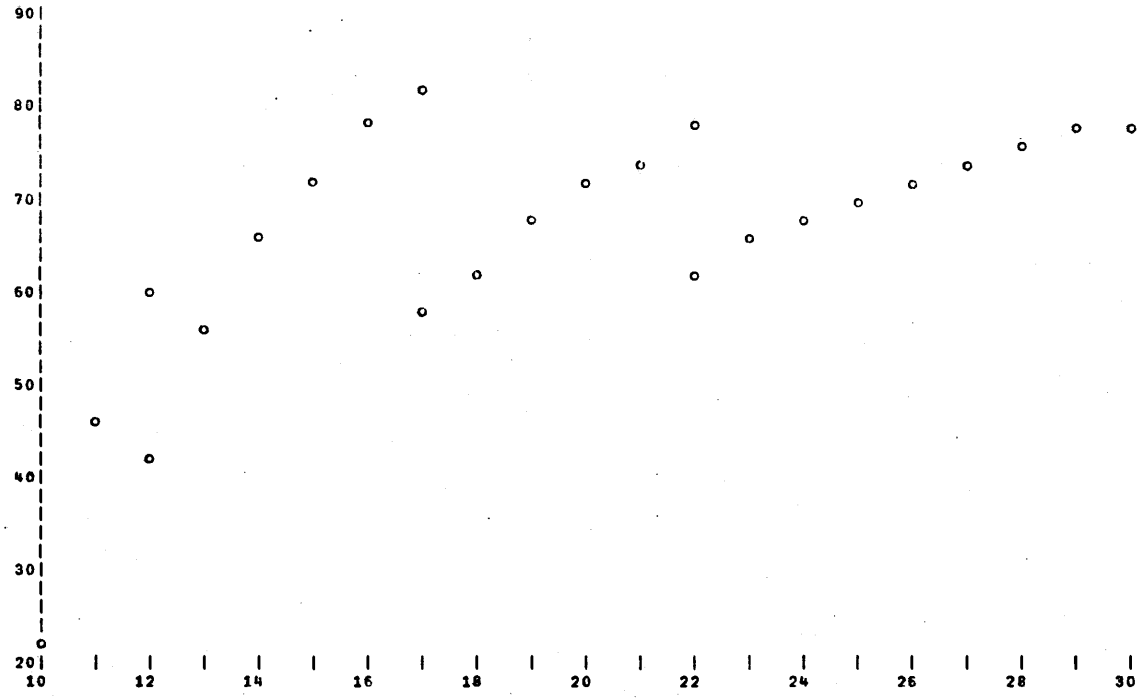
```
*       SIM
SABE USAR ESTE PROGRAMA? CONTESTE SI O NO.
* NO
ESTE PROGRAMA SIMULA EL DESARROLLO DE UN RODAL DE PINO INSIGNE
SOMETIDO A UN PLAN DE MANEJO CUALQUIERA.
AL ESCRIBIR VALORES CON DECIMALES USE UN PUNTO EN LUGAR DE LA
COMA. RESPONDA LAS PREGUNTAS CON SI O NO.
ESCRIBA LA EDAD INICIAL DEL RODAL, EN AÑOS
□:
*       10
ESCRIBA LA ALTURA DOMINANTE INICIAL, EN METROS
□:
*       12.3
ESCRIBA EL NUMERO INICIAL DE ARBOLES POR HECTAREA
□:
*       1500
ESCRIBA EL AREA BASAL INICIAL, EN METROS CUADRADOS POR HECTAREA
□:
*       22
EL INDICE DE SITIO ESTIMADO ES 26.5643751 3METROS.
ESCRIBA LAS EDADES A LAS QUE SE EFECTUARAN RALEOS, SEPARADAS POR ESPACIOS
□:
*       12 17 22
ESCRIBA LOS CORRESPONDIENTES PORCENTAJES DE AREA BASAL A EXTRAER
□:
*       30 30 20
LA EVOLUCION MAS PROBABLE DEL RODAL ES LA SIGUIENTE:
```

EDAD. AÑOS.	ALTURA. METROS.	NUMERO DE ARBOLES POR HECTAREA.	AREA BASAL. M. CUADRADOS POR HECTAREA.	DIAMETRO MEDIO. CENTIMETROS.	VOL. TOTAL. MTS. CUBICOS POR HECTAREA.	V. ASERRABLE. P. CUADRADOS POR HECTAREA.	VOL. PULPABLE. METROS RUMA POR HECTAREA.
10	12,3	1500	22,0	13,7	90	0	61,3
11	14,1	1493	45,5	19,7	215	8774	117,8
12	15,9	1483	60,0	22,7	318	20020	152,0
12	15,9	749	42,8	26,8	223	19628	88,4
13	17,6	749	55,6	30,8	325	35464	107,3
14	19,1	749	65,2	33,4	415	50092	121,8
15	20,6	749	72,4	35,1	496	63231	134,0
16	21,9	749	77,7	36,4	568	75251	144,7
17	23,2	749	81,8	37,4	632	85981	154,3
17	23,2	378	57,3	44,0	443	69031	79,6
18	24,4	378	62,9	46,1	512	82432	83,5
19	25,5	378	67,6	47,8	574	94723	86,8
20	26,6	378	71,4	49,1	632	106013	89,8
21	27,6	378	74,6	50,2	685	116406	92,6
22	28,5	378	77,3	51,1	734	125995	95,2
22	28,5	253	61,8	55,8	587	105445	61,2
23	29,4	253	65,0	57,3	637	115638	62,2
24	30,2	253	67,8	58,5	683	125117	63,1
25	31,0	253	70,3	59,5	726	133950	63,9
26	31,7	253	72,4	60,4	766	142199	64,7
27	32,4	253	74,3	61,2	803	149917	65,4
28	33,1	253	76,0	61,9	839	157153	66,2
29	33,7	253	77,5	62,5	872	163950	66,9
30	34,3	253	78,9	63,1	903	170344	67,5

PRODUCTO DE RALEOS, POR HECTAREA:

EDAD DE RALEO.	NUMERO DE ARBOLES.	AREA BASAL. M. CUADRADOS.	VOL. TOTAL. MTS. CUBICOS.	V. ASERRABLE. P. CUADRADOS.	VOL. PULPABLE. METROS RUMA.
12	734	18,0	95,4	2301,1	57,5
17	371	24,5	189,7	19110,7	67,7
22	125	15,5	146,8	21144,6	32,0

DESEA ALGUN GRAFICO?
* SI
DESEA UN GRAFICO DE ALTURA SOBRE EDAD?
* NO
DESEA UN GRAFICO DE NUMERO DE ARBOLES SOBRE EDAD?
* NO
DESEA UN GRAFICO DE AREA BASAL SOBRE EDAD?
* SI




```
  DESEA UN GRAFICO DE DIAMETRO MEDIO SOBRE EDAD?
* NO
  DESEA UN GRAFICO DE VOLUMEN TOTAL SOBRE EDAD?
* NO
  DESEA UN GRAFICO DE VOL. ASERRABLE SOBRE EDAD?
* NO
  DESEA UN GRAFICO DE VOL. PULPABLE SOBRE EDAD?
* NO
  DESEA PROBAR OTRA ALTERNATIVA DE MANEJO?
* NO
  DESEA PROBAR CON OTRO RODAL?
* NO
  ESPERO HABERLE SIDO UTIL. HASTA PRONTO.
```

BIBLIOGRAFIA

ACKOFF, R.L. and SASIENI, M. **Foundations of operations research. International** Edition. New York, John Wiley, 1968, 455p.

BARTLETT, M.S. **An introduction to stochastic processes. With special reference to methods and applications.** London, Cambridge University Press, 1960, 362 p.

BELLMAN, R. and KALABA, R. **Dynamic programming and modern control theory.** ~~Princeton, New Yersey, Princeton University Press, 1957, 339p. illus.~~ New York, Academic Press, 1965, 112 pp.

BELLMAN, R. **On the application of the theory of dynamic programming to the study of control processes.** In: BELLMAN, R. and KALABA R. **Selected papers on mathematical trends in control theory.** New York, Dover Publications, 1964,200p., illus.

COX, D.R. and MILLER, H.D. **The theory of stochastic processes.** London, Methuen, 1965. 398p.

CHURCHMAN, C.W. **Introduction to operations research.** New York, Wiley, 1957, - 645p.

GARCIA VIDAL, Oscar, **Problemas y modelos en el manejo de las plantaciones forestales.** Santiago, Universidad de Chile, Escuela de Ingeniería Forestal, 1968, 64p.- (tesis)

GOLDBERG, S. **Ecuaciones en diferencias finitas.** Marcombo, 1964.

LAAR VAN, A. **Influence of tree parameters and stand density on diameter growth of Pinus Radiata.** *South African Forestry Journal*, South Africa, No. 70: 5-14 , - 1969.

MITCHELL, Kenneth. **Simulation of the growth of even-aged stands of White Spruce,** New Haven, Yale University: School of Forestry, 1969, 48p. (Bulletin No. 75).

NEWNHAM, R.M. **The development of a stand model for Douglas-fir.** University of British Columbia (Thesis). In: *Disertation Abstracts.* 26(7): 3567, 1966.

A simulation model for studying the effect of stand structure on haversting pattern. *The Forestry Chronicle,* Canada. 42(1):39-44, 1969.

Simulation Models in forest management and haversting. *The Forestry Chronicle*, Canada. 44(1): 7-13, 1968.

The use of computers in simulation. *Pulp and Paper Magazine of Canada,* 69(11):104-106, 1968.

OPIE, Jack. **Predictability of individual tree growth using various definitions of competing basal area.** *Forest Science,* Washington. 14(3): 314-323, 1968.

SAKAI, K.I. et allii. **Intraspecific competition in forest trees.** *Silvae Genetica*, Frankfurt. 17(1): 1-5-, 1968.

SMITH, H.G. et allii. **Importance of distribution and amount of mortality can be defined by simulation studies.** *The Commonwealth Forestry Review,* London. 44(121) 188-192, 1965

WIBERG, D.M. **State Space and linear systems.** New York, Schaum Publishing, 1971, (Schaum's Outline Series).

MESAROVIC

ZADEH, L.A. **The concept of state in system theory.** In: *MEASOROVICH, M.D.* ed. *Views on general systems theory.* New York, Wiley, 1963. (Symposium 2d. Case Institute of Technology).

GARCIA VIDAL, Oscar

Sobre modelos matemáticos de rodal. Santiago, Instituto Forestal, 1974.
29p. ilus. (Informe Técnico No. 48)

El propósito de este informe técnico es exponer algunos conceptos útiles, para el estudio de los rodales forestales á través de modelos matemáticos.

Este trabajo es una ampliación de algunas ideas presentadas anteriormente por el autor (1968) y basadas en una charla ofrecida en la Universidad Austral.

GARCIA VIDAL, Oscar

Sobre modelos matemáticos de rodal. Santiago, Instituto Forestal, 1974.
29p. ilus. (Informe Técnico No. 48)

El propósito de este informe técnico es exponer algunos conceptos útiles, para el estudio de los rodales forestales a través de modelos matemáticos.

Este trabajo es una ampliacion de algunas ideas presentadas anteriormente por el autor (1968) y basadas en una charla ofrecida en la Universidad Austral.

GARCIA VIDAL, Oscar

"Some concepts about stand mathematical models." Instituto Forestal, 1974.
29p, ilus. (Technical Report 48)

The aim of this technical report is to explain some useful concepts in the study of stand, through matematical models.

This work is an enlargement of some ideas presented previously by the author (1968) based in a speech offered in Universidad Austral.

GARCIA VIDAL, Oscar

"Some concepts about stand mathematical models.", Instituto Forestal, 1974.
29p, ilus (Technical Report 48).

The aim of this technical report is to explain some useful concepts in the study of stand, through matematical models.

This work is an enlargement of some ideas presented previously by the author (1968) based in a speech offered in Universidad Austral.

Impreso en talleres del Instituto Forestal
Valenzuela Llanos 1061 - Casilla 3085
Santiago de Chile, Junio de 1974
Diagramación y comp. de texto
Lucía Fellmer Ruf