

# DIMENSIONALIDAD EN LOS MODELOS DE CRECIMIENTO

**Oscar García**

University of Northern British Columbia, 3333 University Way, PRINCE GEORGE (BC, Canada V2N 4Z9). Correo electrónico: [garcia@unbc.ca](mailto:garcia@unbc.ca)

## Resumen

Modelos de un mismo sistema pueden diferir mucho en su escala, nivel de detalle, o más precisamente en el caso de modelos dinámicos, en la dimensionalidad del espacio de estados. Se analizan las implicaciones de esta dimensionalidad, tanto en general como más específicamente en relación a modelos de crecimiento. Se comenta sobre la naturaleza de la modelización, se distingue entre modelos descriptivos y predictivos, y se explican brevemente los conceptos de sistema dinámico y espacio de estados. A través de ejemplos, se demuestran límites a la previsibilidad que pueden hacer imposible las predicciones confiables a nivel individual. El entender perfectamente el funcionamiento de un sistema, o el simularlo en ordenador, no implica el poder predecir su comportamiento. Aunque los modelos detallados son útiles para fines de investigación, modelos agregados de baja dimensionalidad son generalmente más apropiados para la gestión.

Palabras clave: *Simulación, Predicción, Montes, Sistemas dinámicos, Espacios de estados, Sistemas complejos, Gestión forestal*

## INTRODUCCIÓN

Los modelos de crecimiento son útiles como instrumentos de investigación, y para predecir resultados en la gestión forestal. Su nivel de detalle, escala, o dimensionalidad del espacio de estados, varía entre límites muy amplios. Examinaremos algunas características y consecuencias de la escala utilizada. Gran parte de la discusión es aplicable a modelos en general, no sólo a modelos de crecimiento.

## MODELOS

Un modelo (o una teoría) es una representación parcial de algún aspecto de la "realidad". Por ejemplo, un modelo a escala de un edificio

o de una aeronave (modelos materiales), el manual para un reproductor de video (modelo verbal), o nuestra idea subjetiva de los resultados de actuar de cierta manera en una situación determinada (modelo mental). Los modelos matemáticos son como los verbales, pero usando lenguaje matemático. Generalmente tienen la ventaja de ser menos ambiguos. Tal vez más importante, un modelo matemático permite utilizar recetas conocidas, reglas o teoremas previamente establecidos, en lugar de tener que razonar partiendo desde cero en cada caso. Para tomar cualquier decisión es imprescindible el emplear algún tipo de modelo; éste es el nexo que conecta acciones con consecuencias.

*“Un ingeniero cree que sus ecuaciones son una aproximación de la realidad. Un físico cree que la realidad es una aproximación de*

*sus ecuaciones. A un matemático no le importa”.*

*Anónimo*

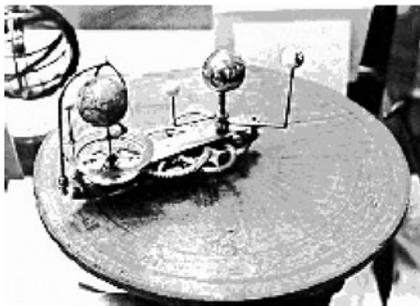
Aunque obviamente una caricatura, esta cita refleja ciertas actitudes relacionadas con la percepción de modelos y teorías. No tiene mayor relevancia aquí la última parte, que se refiere al papel del matemático, como tal, el estudio de relaciones formales independientemente de lo que pudiesen representar (el desarrollo de las “recetas” de que hablábamos antes). Parecen existir, sin embargo, diferencias en la forma de pensar sobre la naturaleza de los modelos que pudieran estar asociadas con distintas experiencias y tradiciones. Se habla a menudo del científico descubriendo las leyes naturales, con la implicación de que tales modelos tienen una existencia independiente. Por otro lado, se puede argumentar que los humanos no pueden comprender en todos sus detalles una realidad en que todo está relacionado con todo, y solo pueden razonar a través de representaciones basadas en clasificaciones y definiciones artificiales, ignorando las interacciones menos importantes. Los modelos tendrían que ver más con la estructura del cerebro humano que con la realidad allá “afuera” (¡suponiendo que tal realidad exista!). De cualquier modo, al menos para el tipo de modelos en que estamos interesados, parece más útil pensar de esta manera en la que no tiene sentido hablar de un modelo verdadero. Citando a G.E.P. Box ligeramente fuera de contexto, “Todos los modelos son falsos, pero algunos son útiles”.

¿Útiles para qué? Existe controversia sobre la superioridad de varios tipos de modelos (ver

p.e. el número especial presentado por MOHREN & BURKHART, 1994). Parte del problema es que no se especifican bien los criterios. Una de las dicotomías es el uso de modelos como herramientas de investigación, o como herramientas de gestión. En investigación, el uso de modelos es primordialmente descriptivo; interesa comprender el funcionamiento de un sistema, sintetizar conocimientos previamente aislados, y generar preguntas para guiar futuros estudios. El modelo es una hipótesis de trabajo, y los mayores avances se consiguen cuando la hipótesis falla. En gestión, el propósito es principalmente predictivo, predecir un comportamiento futuro, posiblemente en respuesta a tratamientos alternativos. Precisión y exactitud en las predicciones adquiere prioridad sobre explicaciones cualitativas.

Por ejemplo, la figura 1(a) es un modelo mecánico que ayuda a entender el movimiento de los planetas. Este podría usarse para predecir cuándo oscurecerá hoy. Sin embargo, el modelo empírico de la figura 1(b), que tiene poco o nada que ver con el funcionamiento del sistema solar, puede ser más preciso y conveniente. Obsérvese de paso que las proporciones de tamaños y distancias en la figura 1(a) están lejos de las reales, y precisamente eso hace al modelo más comprensible; el realismo en un modelo no es necesariamente una virtud.

Cómo se explicará luego, otro aspecto relacionado con el uso del modelo es el nivel más apropiado de detalle o complejidad, o la dimensionalidad del espacio de estados en modelos dinámicos.



(a)



(b)

**Figura 1.** Modelos del movimiento terrestre: (a) Mecánico, casual (b) Empírico

## MODELOS DINÁMICOS DE CRECIMIENTO

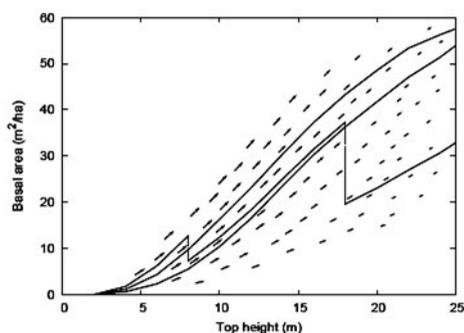
Los modelos de rodal más tradicionales son las tablas de producción. Estas describen cómo volúmenes por hectárea, diámetro medio, altura dominante, número de árboles, u otras variables, cambian en función del tiempo. Suficientes en muchas situaciones, su uso es más problemático cuando hay claras, o en otros casos en que un rodal se ha desviado de la trayectoria nominal contemplada en la tabla. Isaac Newton introdujo un enfoque más flexible que el modelar directamente funciones del tiempo: un modelo dinámico describe la tasa de cambio de ciertas variables que definen el estado del sistema. Las trayectorias del estado son sintetizadas por integración o acumulación de las tasas de cambio, representadas por ecuaciones diferenciales o en diferencias (Figura 2). Otras variables de interés pueden estimarse a partir del estado en un momento dado (LUENBERGER, 1979; GARCÍA, 1994, 2005b).

Un sistema puede ser representado por modelos dinámicos con diferentes niveles de detalle o de resolución, que difieren en la dimensión del vector de estado (número de variables de estado). En particular, la clasificación clásica de modelos de crecimiento (GOULDING, 1972; MUNRO, 1974; VANCLAY, 1994) refleja diferencias en dimensionalidad (GARCÍA, 1988). Los modelos de rodal completo usan unas pocas variables agregadas, tales como el área basimétrica, altura dominante, número de árboles. Los

modelos de árbol individual, en cambio, usan de decenas a miles de variables de estado, incluyendo dimensiones de cada uno de los árboles en un rodal o parcela de muestra. Los modelos de árbol individual pueden ser dependientes de la distancia, que usan coordenadas de los árboles para el cálculo de índices de competencia (STAEBLER, 1951; NEWNHAM, 1964; MITCHELL, 1975), o independientes de la distancia, que ignoran la estructura espacial (GOULDING, 1972; STAGE, 1973).

## AGREGAMIENTO

Con la disponibilidad y aumento en el poder de los ordenadores, ha habido un énfasis creciente en el desarrollo de modelos de árbol individual. Hay una tendencia a considerar el agravamiento al nivel de rodal como innecesario y obsoleto. Se mantiene la popularidad de las teorías de autoraleo (*self-thinning*), que pueden interpretarse como modelos dinámicos en dos dimensiones, poco precisos para rodales manejados (GARCÍA, 2005a). Pero los modelos de dimensionalidad intermedia entre estos y los de árbol individual son hoy más raros en la literatura, aunque continúan siendo usados extensamente en la práctica del manejo forestal. Algo parecido ha ocurrido más recientemente en la modelización orientada a la investigación en ecología de poblaciones (p.ej. GRIMM, 1999), y en otras áreas como la física, la economía y la sociología (GARCÍA, 2001).



**Figura 2.** Ejemplo de modelo dinámico de crecimiento con dos variables de estado. Se puede seguir las flechas que representan las tasas de cambio de las dos variables para generar una trayectoria a partir de cualquier estado inicial (GARCÍA, 2005a)

Por su flexibilidad, simplicidad conceptual, y la representación de hipótesis sobre interacciones en las formas más naturales e intuitivas, estos modelos de árbol individual, modelos basados en el individuo o modelos de multiagentes, son particularmente útiles como herramientas de investigación. Incluso para estos fines, sin embargo, una alta dimensionalidad presenta inconvenientes que pueden hacer aconsejable complementar los modelos de individuo con modelos agregados. Una de estas desventajas podría denominarse “efecto ¿Y qué?”: el observar los resultados de simulaciones complejas no es siempre muy informativo. Un enfoque reduccionista también puede perder de vista las llamadas propiedades emergentes. Existe una creciente y confusa literatura sobre dichas propiedades, que tienden a plantearse en el sentido de que “el todo es más que la suma de las partes”; en realidad, en general se refieren a que puede ser más fácil modelizar correctamente los individuos que las interacciones entre ellos. Como lo dicen LEVIN & PACALA (1997), *los modelos basados en el individuo tienen la ventaja de que se acercan más a los detalles de los sistemas reales; esa ventaja es también una desventaja en que retienen todos los detalles que pueden ocultar lo que es realmente importante a escalas más amplias*. Por estas y otras razones, hay un interés creciente en la obtención de modelos agregados a partir de modelos individuales (GARCÍA, 2001).

En el caso de las predicciones con fines de gestión, las limitaciones de los modelos basados en el individuo son más serias. Una tiene que ver con las correlaciones espaciales en el tamaño y crecimiento de árboles vecinos producidas por la competencia, por semejanza de micrositio, u otros factores. Al no estar los tamaños de los árboles independientemente distribuidos sobre el terreno, el concepto de distribución de tamaños utilizado por los modelos independientes de la distancia presenta problemas, y la estimación de sus parámetros puede tener sesgos considerables. Se ha encontrado además que el efecto del micro-sitio a menudo produce correlaciones espaciales positivas al dominar sobre la competencia, al contrario de lo supuesto en los actuales modelos dependientes de distancia (GARCÍA, 2006). Un segundo problema en la aplicación de modelos muy detallados es que muchas veces no se conoce el estado inicial con suficiente precisión, lo que obviamente no permite predicciones fiables de los estados futuros. Por ejemplo, aún suponiendo independencia, se sabe que para obtener estimaciones razonables de los momentos superiores o de la forma de una distribución de probabilidades se necesitan muestras muy grandes (KENDALL & STUART, 1976). A menudo esta alta variabilidad (Figura 3) no es apreciada en las aplicaciones, y nos podemos engañar en cuanto a la fe puesta en las proyecciones. Un tercer problema con el uso de modelos complejos para hacer predicciones se examina en más detalle a continuación.

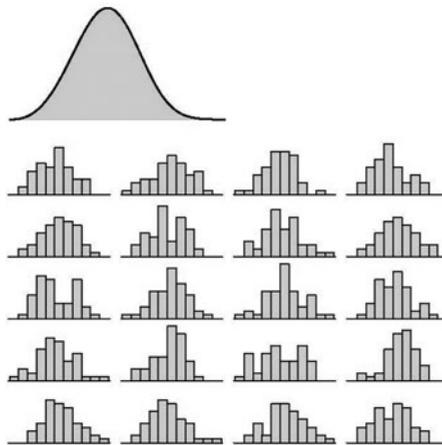


Figura 3. Histograma de veinte muestras aleatorias de tamaño 50 obtenidas de la distribución indicada

## LÍMITES A LA PREVISIBILIDAD

Esta limitación de los modelos basados en el individuo va más allá de los modelos de crecimiento, y tiene que ver con lo que se puede o no se puede predecir. Para ilustrarla, pensemos en los círculos de la figura 4 como partículas, bolas o discos moviéndose en el plano. El individuo de color más oscuro es lanzado en una cierta dirección. Es fácil calcular la trayectoria (Figura 4(a)). Ahora, ¿qué sucede si cambiamos ligeramente el ángulo de lanzamiento? (Figura 4(b)). Aún con una incertidumbre de una millonésima de grado en el ángulo inicial, el resultado pasa a ser completamente imprevisible luego de unos cuantos rebotes. El efecto mariposa, teoría del Caos, dependencia sensible de condiciones iniciales.

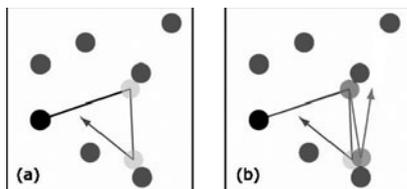
La situación en modelos de crecimiento puede no ser tan mala como esto; o tal vez sí. Experimentos con algunos modelos indican que al cambiar unos pocos milímetros en el diámetro inicial de uno de los árboles, la diferencia aumenta y se propaga rápidamente al resto. Probablemente no sea posible proyectar diámetros individuales tan bien como generalmente se cree.

¿Qué se puede hacer? Si la figura 4 representara un gas, el comportamiento del conjunto podría aproximarse con la ecuación  $PV = kT$ , presión multiplicada por volumen es proporcional a la temperatura. Nótese que estas variables son propiedades del sistema agregado, no existen al nivel molecular. Presión y temperatura están relacionadas con la media y la varianza de las velocidades. Para un gas ideal, la Mecánica Estadística es capaz de obtener la ecuación agre-

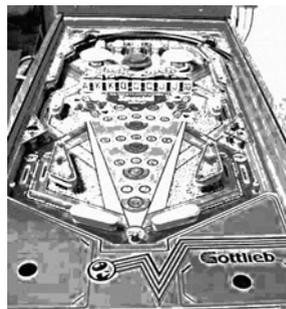
gada a partir de la dinámica de las moléculas individuales. En sólidos, las relaciones entre propiedades de conjunto y propiedades moleculares son aún temas de investigación.

Al diseñar un puente o un automóvil, en principio uno podría modelizar la trayectoria de todas las moléculas individuales. En la práctica, uno probablemente usaría una posición media (centro de gravedad), y aplicaría un modelo agregado propuesto por Isaac Newton en el Siglo XVII:  $d^2x/dt^2 = F/m$ . Este es un modelo empírico, basado en observaciones, sin base teórica ninguna. Y es una aproximación, falla con lo muy rápido o con lo muy pequeño, pero dentro de cierto rango es bastante buena.

La figura 5 muestra una máquina “flíper”. Explicación para los más jóvenes: una bola es lanzada por el canal en el lado derecho, y baja debido a la pendiente chocando con varios objetos. La teoría es bien conocida, no hay ningún misterio en su funcionamiento. ¿Podemos predecir la trayectoria de la bola? Comprender o explicar no implica el poder predecir. La figura 6 es un ejemplo aún mejor: *Microsoft Pinball*. Es una simulación en ordenador bastante realista; aparentemente no contiene elementos aleatorios, sólo cálculos basados en las leyes de la física. Dado el tiempo que se mantiene presionada la barra de espacios, el movimiento de la bola está perfectamente predeterminado. ¿Podemos predecirlo? A veces se sostiene que algún modelo complejo de proceso aún no es muy preciso debido a que no se conoce bien el funcionamiento de algunos componentes, o los valores de ciertos parámetros; con estudios adi-



**Figura 4.** Trayectorias en el plano. Efecto de la incertidumbre en el ángulo inicial



**Figura 5.** Máquina “flíper”. Conocer su funcionamiento no garantiza su previsibilidad

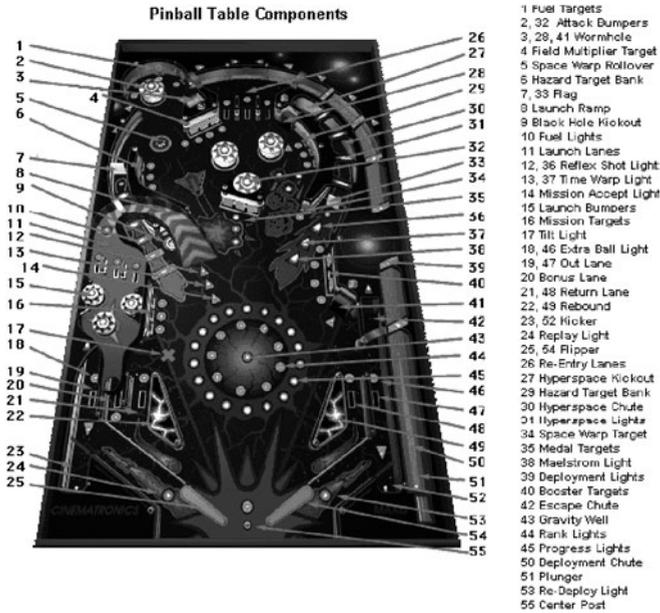


Figura 6. Microsoft pinball, simulación de un fliper en el ordenador. Simular no es predecir

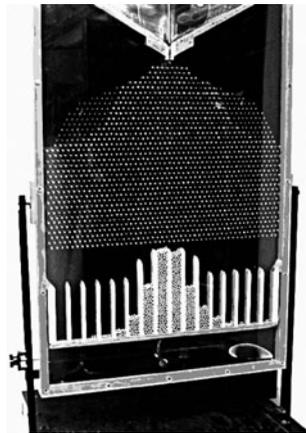


Figura 7. Aparato para demostrar las distribuciones binomial o la normal. Predicciones a nivel individual son prácticamente imposibles, al contrario de algunos resúmenes estadísticos

cionales podría llegar a ser útil en la gestión. En realidad, un modelo puede ser muy útil para comprender mejor las cosas, pero hay limitaciones intrínsecas a la previsibilidad más allá de cierto nivel.

Un último ejemplo se muestra en la figura 7. Es un aparato usado a veces para enseñar temas

de probabilidades. Bolitas de acero caen a través de una red de clavijas hasta depositarse en compartimentos en la parte inferior. Es inútil tratar de predecir individualmente el destino de cualquiera de las bolitas. Es posible, sin embargo, predecir razonablemente bien la posición final, media, y en cierto grado, su varianza. Con una

muestra de tamaño suficiente se puede también obtener alguna idea de la distribución.

## CONCLUSIONES

Los modelos descriptivos, usados fundamentalmente para investigación, generalmente deben ser mecánicos y detallados, con alta dimensionalidad en el espacio de estados, aunque algunos modelos agregados también pueden ser de utilidad. Los modelos detallados y de proceso contribuyen indirectamente a la mejora de modelos orientados a la gestión, pero en estos las prioridades son diferentes. En la gestión es preferible conectar lo más directamente posible las decisiones con los resultados. Contrariamente a lo que a veces se supone, la gestión de sistemas complejos requiere modelos simples.

## BIBLIOGRAFÍA

- GARCÍA, O.; 1988. Growth modelling—A(re)view. *New Zealand Forestry* 33: 14–17. (Traducción española en <http://web.unbc.ca/publ/vision.pdf>).
- GARCÍA, O.; 1994. The state-space approach in growth modelling. *Can. J. For. Res.* 24: 1894–1903.
- GARCÍA, O.; 2001. On bridging the gap between tree-level and stand-level models. In: K. Renolls (ed.), *Proceedings of IUFRO 4.11 Conference "Forest Biometry, Modelling and Information Science"*, University of Greenwich, London. <http://cms1.gre.ac.uk/conferences/iufro/proceedings>.
- GARCÍA, O.; 2005a. TADAM: A dynamic whole-stand approximation for the TASS growth model. *For. Chron.* 81: 575–581. (Errata: 81(6): 815, 2005).
- GARCÍA, O.; 2005b. Thinking about time. In: K. Naito (ed.), *The Role of Forests for Coming Generations—Philosophy and Technology for Forest Resource Management*: 47–54. Japan Society of Forest Planning Press. Utsunomiya.
- GARCÍA, O.; 2006. Scale and spatial structure effects on tree size distributions: Implications for growth and yield modelling. *Can. J. For. Res.* 36: 2983–2993.
- GOULDING, C. J.; 1972. *Simulation techniques for a stochastic model of the growth of Douglas-fir*. Ph.D. thesis. University of British Columbia. Prince George.
- GRIMM, V.; 1999. Ten years of individual-based modelling in Ecology: What have we learned and what could we learn in the future? *Ecol. Model.* 115: 129–148.
- KENDALL, M. & STUART, A.; 1976. *The Advanced Theory of Statistics 1: Distribution Theory*. Fourth edn. Griffin.
- LEVIN, S. A. & PACALA, S. W.; 1997. Theories of simplification and scaling of spatially distributed processes. In: D. Tilman & P. Kareiva (eds.), *Spatial Ecology. The role of Space in Population Dynamics and Interspecific Interactions*: 271–295. Princeton University Press. Princeton.
- LUNENBERGER, D.; 1979. *Introduction to Dynamic Systems; Theory, Models and Applications*. Wiley. New York.
- MITCHELL, K. J. 1975. *Dynamics and simulated yield of Douglas fir*. Forest Science Monograph 17. Society of American Foresters. Bethesda.
- MOHREN, G. & BURKHART, H.; 1994. Contrasts between biologically-based process models and management-oriented growth and yield models. *Forest Ecol. Manage.* 69: 1–5.
- MUNRO, D. D. (1974) Forest growth models: A prognosis. In: J. Fries (ed.), *Growth Models for Tree and Stand Simulation*: 7–21. Royal College of Forestry, Research Note 30.
- NEWHAM, R. M.; 1964. *The Development of a Stand Model for Douglas Fir*. Ph.D. thesis, The University of British Columbia. Prince George.
- STAEBLER, G. R.; 1951. *Growth and Spacing in an Even-aged Stand of Douglas-Fir*. Master's thesis. School of Natural Resources, University of Michigan.
- STAGE, A. R.; 1973. *Prognosis model for stand development*. Research Paper INT-137, USDA Forest Service, Int. Northwest For. and Range Exp. Sta. Ogden.
- VANCLAY, J. K.; 1994. *Modelling Forest Growth and Yield: Applications to Mixed Tropical Forests*. CABI International, Wallingford.